<第三回 硏究發表會 發表論文>

레온티에푸 體系의 生産函數및 그의 動學體系에 關한 小考

都 禹 鉉

一. 序 論

「레온티에푸」體系를 靜學 및 動學體系로 나누고 이것을 各各 開放 및 閉鎖의 두 體系로 細分할 수 있을 것이다.

靜學體系에 있어서는 各 産業의 投資額을 算出하지 않으며 在庫純增 및 資本形成은 다만 하나의 列로서 다루어 지므로 各種의 財貨가 在庫의 純增 또는 資本蓄積을 위해서 販賣된다 하드라도 이것이 어떤 産業에서 어느 産業에로 配分이 되는가는 分明치 않다.

그러므로 資本形成에 있어서 一部門의 生産物이 資本形成用으로 다른 部門에 販賣될 때에 어느 部門에 販賣되었는가를 알기 위해서는 一列로 다루어진 資本形成部門을 여러가지 部門으로 細分하지 않으면 안된다.

이러한 資本去來에 對한 部門分割 與否로 靜學 및 動學體系의 區別이 이루어지는 것이다

靜學體系에서는 投入係數가 中心的인 役割을 하는 것이나 動學體系는 資本係數의 導入으로 이루어진다고 할 수 있을 것이다.

「레온티에푸」體系는 그 體系가 體系內部의 相互關係에 의해서 決定할 수 없는 變數를 包含하고 있는가 없는가에 따라서 各各 開放 및 閉鎖體系로 區分된다.

二. 「레온티에푸」의 生産函數

x를 投入量 곧 要素의 使用量, y를 産出量 곧 財의 生産量이라고 하면 變數는 모두 正이든가 또는 非負이다. 그러면 生産技術의 定式化인 企業의 生産函數는

$$f(x_1,\ x_2,\cdots\cdots,x_n,\ y_1,\ y_2,\cdots,\ y_n)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

일 것이다.

그러나 現實 世界의 技術的 條件은 그야말로 各樣 各色이므로 分析을 위한 數學的 定式化에 있어서는 投入量과 産出量이 連續的으로 變化한다든가 또는 連續

的으로 代替可能하다 든가 하는 明示的인 假定을 前提로한 單純化의 過程이 必要하다. 그러므로 이러한 定式化는 어디까지나 現實에 對한 近似的인 問題로 보아야 할것이다.

問題의 簡潔을 위해서 一生產物, 二要素인 境遇의 生產函數를 보기로 들겠다.

二產業 一家計의 「레온티에푸」體系에 있어서 X_1및 X_2를 各各 第一財 및 第二財 產業의 產出量, X_3을 家計의 生產要素(勞動用役) 提供量, x_{rs}, $\begin{pmatrix} r=1,2,3 \\ s=1,\ 2 \end{pmatrix}$를 第$r$財 產業의 第$s$財產業에 對한 配分量, K_1 및 K_2를 家計의 第一財 및 第二財의 購入量으로 하고 K_3을 無視하면

$$X_1=x_{11}+x_{12}+K_1$$
$$X_2=x_{21}+x_{22}+K_2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$X_3=x_{31}+x_{32}$$

이 얻어진다

그런데 投入係數 a_{rs}, $a_{rs}=\frac{x_{rs}}{X_s}$ $\begin{pmatrix} r=1,\ 2,3 \\ s=1,\ 2 \end{pmatrix}$로 하면 (2)는

$$X_1=a_{11}X_1+a_{12}X_2+K_1$$
$$X_2=a_{21}X_1+a_{22}X_2+K_2 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$
$$X_3=a_{31}X_1+a_{31}X_2$$

로 된다.

(2)의 第一列 및 第二列은 各各 第一財 및 第二財產業의 生產要素量이므로 다음과 같은 生產函數가 얻어진다.

$$\left.\begin{array}{l} X_1=F_1(x_{11},\ x_{21},\ x_{31}) \\ X_2=F_2(x_{12},\ x_{22},\ x_{32}) \end{array}\right. \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

第一財產業의 生產函數 $X_1=F_1(x_{11}, x_{21}, x_{31})$에서 다른 要因을 Parameter로 보고

$$X_1=f(x_{21},\ x_{31}) \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

로 하면 앞서 말한 一生產物 二要素의 單純한 生產函數가 얻어지며 이것으로써 生產函數에 關한 問題의 追求가 보다 쉽게 될 것이다.

「레온티에푸」體系의 特徵인 投入係數 一定의 問題를 다루기에 앞서 보다 一般的인 生產函數의 境遇를 考察키로 한다. 生產函數 $X_1=f(x_{21},\ x_{31})$의

連續的인 偏導函數

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_{21}}=fx_{21}(x_{21},\ x_{31}),\quad \frac{\partial X_1}{\partial x_{31}}=fx_{31}(x_{21},\ x_{31})$$

는 各各 生產要素量 x_{21} 및 x_{31}의 限界生產物이다.

規模에 關한 收益을 決定하기 위해서는 要素를 一定比 $a_{21}:a_{31}$로 하고

$$X_1=f(\lambda a_{21},\ \lambda a_{31})=\phi(\lambda) \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

로 하면 된다.

여기에서 變數 λ가 生產規模를 決定한다. λ에 關한 函數 X_1의 導函數 $\frac{dX_1}{d\lambda}$가

不變이면 產出量 X_1이 要素의 使用量에 比例하여 增大하며 이것이 規模에 關한 收益不變의 境遇인 것이다. (6)에서 變數 λ가 增大할 때 函數 X_1의 λ에 關한 導函數 $\frac{dX_1}{d\lambda}$가 增大 또는 減少하면 X_1은 λ에 關한 增加 또는 減少函數 이므로 이것이 곧 規模에 關한 收益可變의 境遇인 것이다.

生產函數 $X_1=f(x_{21}, x_{31})$은 二變數 函數이며 이것은 한 曲面으로 나타낼 수 있다. 곧 立體解析幾何에 있어서와 같이 X_1, x_{21}, x_{31}를 直交座標로 보아서 얻는 方程式 $X_1=f(x_{21}, x_{31})$의 軌跡이다 이曲面은 二變數函數 $f(x_{21}, x_{31})$의 그림표다

이것은 또한 X_1의 여러가지 固定된 값 $X^{(1)}{}_1$, $X^{(2)}{}_1$, $X^{(3)}{}_1$에 對한

$$X^{(1)}{}_1=f(x_{21}, x_{31}),\ X^{(2)}{}_1=f(x_{21}, x_{31}),\cdots\cdots$$

을 滿足하는 x_{21}, x_{31}의 軌跡인 要素平面 $Ox_{21}x_{31}$위의 等量曲線(生產無差別曲線)으로 投影하여 나타낼수도 있을 것이다.

만약 $X_1=f(x_{21}, x_{31})$가 γ次의 同次函數일 境遇에는

$$f(\lambda x_{21}, \lambda x_{31})=\lambda^{\gamma}f(x_{21}, x_{31})$$

이므로 要素量 x_{21}및 x_{31}의 同一比率 λ로서의 增加는 產出量 X_1의 λ^{γ}인 比率의 增加를 가져온다.

$\gamma=1$일 때 곧 生產函數가 線形同次函數일 境遇에는 (x_{21}, x_{31})인 어떤點에 關하여 그리고 또 그것이 어떤 값이든 λ의 모든 값에 對하여

$$f(\lambda x_{21}, \lambda x_{31})=Xf(x_{21}, x_{31})$$

이다.

P가 線形同次函數를 表示하는 曲面위의 所與의 點이면 P의 座標에 比例的인 座標의 어떤 點도 그 曲面위에 있다.

點 (X_1, x_{21}, x_{31}), $(\frac{1}{2}X_1, \frac{1}{2}x_{21}, \frac{1}{2}x_{31})$, 및 $(2X_1, 2x_{21}, 2x_{31})$는 그중의 一點이 그曲面 위에 있으면 모든 點이 그 曲面위에 있다. 그런데 이性質을 갖는 모든 點은 原點을 所與의 點 P을 連結하는 直線 OP위에 있을 것이다.

第一圖에 있어서 $X_1=f(x_{21}, x_{31})$,

$dX_1=fx_{21}\,d_{21}+fx_{31}\,dx_{31}$ X_1가 一定한 값을 가지면 $O=fx_{21}\,dx_{21}+fx_{31}\,dx_{31}$ 그러므로 $\frac{dx_{31}}{dx_{21}}=-\frac{fx_{21}}{fx_{31}}$이다. 이것은 函數 $X_1=f(x_{21}, x_{31})$에 있어서 X_1이 特定의 값을 갖는 境遇의 等量曲線 $f(x_{21}, x_{31})$의 어떤 點 (x_{21}, x_{31})에 있어서의 切線의 x_{21}軸에 對한 기울기다.

原點을 通過하는 直線 OP위의 點을 $P^{(1)}(x^{(1)}{}_{21}, x^{(1)}{}_{31})$, $P^{(2)}(x^{(2)}{}_{21}, x^{(2)}{}_{31}),\cdots\cdots$라 하고 λ가 任意의 常數이면

$x^{(2)}{}_{31}=\lambda x^{(1)}{}_{31}$, $x^{(2)}{}_{21}=\lambda x^{(1)}{}_{21}$가 成立할 것이다. 그런데 $P^{(1)}(x^{(1)}{}_{21}, x^{(1)}{}_{31})$에 있어서의 切線의 기울기는 앞서 말한바와 같이

$\frac{dx^{(1)}{}_{31}}{dx^{(1)}{}_{21}}=-\frac{fx^{(1)}{}_{21}}{fx^{(1)}{}_{31}}$이며 點 $P^{(2)}(x^{(2)}{}_{21}, x^{(2)}{}_{31})$에 있어서의 切線의 기울기는

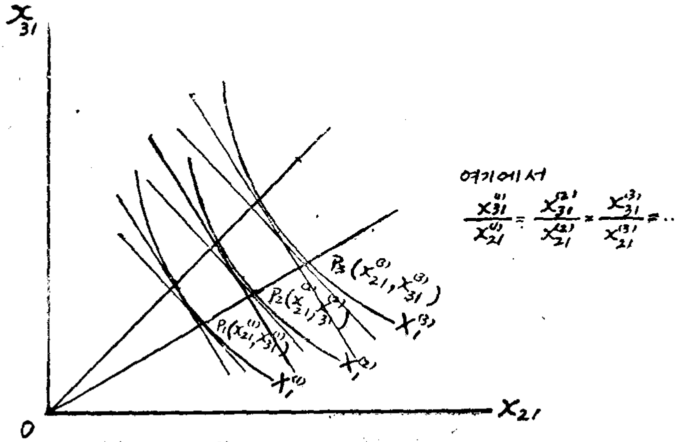
$$\frac{dx^{(2)}_{31}}{dx^{(2)}_{21}} = -\frac{fx^{(2)}_{21}}{fx^{(2)}_{31}} = -\frac{\lambda fx^{(1)}_{21}}{\lambda fx^{(1)}_{31}} = -\frac{fx^{(1)}_{21}}{fx^{(1)}_{31}} \quad (\because x^{(2)}_{31}=\lambda x^{(1)}_{31},\ x^{(2)}_{21}=\lambda x^{(1)}_{21})$$

따라서 $\frac{dx^{(1)}_{31}}{dx^{(1)}_{21}}=\frac{dx^{(2)}_{31}}{dx^{(2)}_{21}}$ 곧 點 $P^{(1)}(x^{(1)}_{21},\ x^{(1)}_{31},)$ 및 $P^{(2)}(x^{(2)}_{21},\ x^{(2)}_{31})$에 있어서의 切線의 기울기는 같다.

그러므로 第一圖에서 原點을 通過하는 任意의 直線과 等量曲線과의 交點에 있어서 切線은 모두 平行할 것이다. 線形同次生產函數에 있어서는 앞서 말한 線形同次函數의 性質에 의하여 모든 生產要素의 比例的 增大는 生產物의 比例的 增大를 가져오며 使用되는 各 生產要素의 相對的 數量만이 重要한 것이고 實際의 生產規模가 問題로 되지않는 生產規模에 對한 收益不變의 境遇임을 알수 있다.

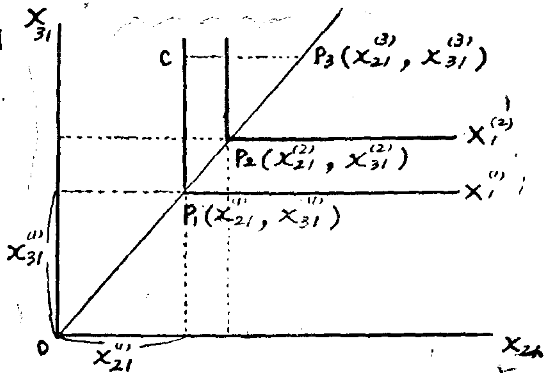
上述한 바는 하나의 生產物이 生產될 境遇 生產要素가 連續的으로 代替可能하다는 것을 假定하였으나 固定된 技術係數를 前提로하지 않는 보다 一般的인 生產函數의 境遇였다. 그런데 技術係數가 一定한 것을 假定하는「레온티에푸」體系는 生產函數 $X_1=f(x_{21},\ x_{31})$에 있어서 投入物이 $x_{31}:x_{21}=a_{31}:a_{21}$ ((2),(3) 參照)인 一定比로 使用되고 다른 比率로서는 使用되지 않는 特殊한 形態일 것이다.

이것을 圖表로써 說明하면 第二圖에서 $x^{(1)}_{31}:x^{(1)}_{21}=a_{31}:a_{21}$가 一定인 境遇 곧 點 P_1의 座標의 比가 $a_{31}:a_{21}$일 때 OP_1를 通過하는 直線위에 있는 點만이 $x_{31}:x_{21}=a_{31}:a_{21}$의 關係를 滿足할 것이다. 第二圖에서 點 C가 表示하는 生產要素量 x_{21} 및 x_{31}의 한 組合으로 주어 졌을 때 P_3을 達成하려면 第二財가 CP_3만큼 不足하다 그런데 第二財 및 第三財의 組合의 比는 一定하므로 OP線 위에 있는 點 P_1를 採用하지 않으면 안된다. 第二財는 完全히 使用되지 만은 第三財는 P_1C만큼 남게된다. 그러므로 C는 P_1과 等量의 X_1을 生產하는 投入量의 組合임을 알수있다. 따라



第1図

서 이 경우에 있어서는 等量曲線(生產無差別曲線)은 第二圖와 같은 L字型이 될것이다.



第 2 図

三. 「레온티에푸」의 動學體系

「레온티에푸」體系의 動學化는 產出量과 資本 stock 또는 產出量의 變化와 投資의 關係인 加速度 原理를 利用하면 된다.

곧 加速度因子의 定數로 解釋되는 資本係數行列이 그의 靜學體系에 追加됨으로써 이루어 지는 것이다. 經濟의 flow의 構造를 表示하는 一定한 投入—產出係數 a_{rs}, $(r,s=1,2,\cdots,n)$를 要素로 하는 投入係數行列 $A^\circ=[a_{rs}]$, 經濟의 資本構造를 表示하는 資本係數 b_{rs}, $(r,\ s=1,\ 2,\cdots,n)$를 要素로 하는 資本係數行列을 $B=[b_{rs}]$, X를 產出高 vector, S를 各財貨의 資本 stock의 vector, K를 最終需要 vector, 生產條件을 表示하는 技術行列 $A=I-A^\circ$, ＜$I=[\delta_{rs}]$ $(r,\ s=1,\ 2,\cdots,n)$인 單位行列 δ_{rs}는 Kronecker's delta이다＞로 하면 動學體系는

$$X=A^\circ X+B\mathring{X}+K=A^\circ X+B\frac{dX}{dt}+K\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

로 된다.

여기서 $\mathring{X}=\dfrac{dX}{d\,t}=\left\{\dfrac{dXr}{dt}\right\}$ $(r=1,\ 2,\cdots,n)$는 產出量의 變化率의 列 vector이다.

閉鎖體系에 있어서는 n番째의 產業은 家計로서 消費財를 投入하여 勞動用役을 產出한다 (7) 에서 K를 除外한 것으로 表示된다. 곧

$$X=A^\circ X+B\mathring{X}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

이것은 또한

$$X-A^\circ X=B\mathring{X},\ IX-A^\circ X=BX,\ (I-A^\circ)X=B\mathring{X}\cdots\cdots\cdots(9)$$

$A=I-A^\circ$ 이므로 (9)는

$$AX=B\mathring{X} \text{ 또는 } AX=B\frac{d\mathring{X}}{dt}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

(10)은 一階一次(線型) 微分方程式體系이다.

(10)의 特殊解를 求하기 위해서 다음과 같이 놓는다.

$$X=Ke^{-}\rho^{t}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

여기서 $K=\{kr\}$는 定數의 列 vector이다. ρ는 解를 決定하며 求하려는 scalar이

다.

$$\frac{dX}{dt}=\frac{d}{dt}(Ke^{-\rho t})=K\frac{d}{dt}(e^{-\rho t})=K\cdot\log e^{-\rho}\cdot e^{-\rho t}=K\cdot(-\rho)\cdot e^{-\rho t}=-K\rho e^{-\rho t} \quad (12)$$

(11) 및 (12)를 微分方程式體系 (10)에 代入하고 $e^{-\rho t}$로 約하면

$$AK=-\rho BK$$

$$AK+\rho BK=(A+\rho B)K=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

行列$(A+\rho B)$는

$$A+\rho B=\begin{pmatrix} 1+\rho b_{11} & -a_{12}+\rho b_{12}\cdots & -a_{1n}+\rho b_{1n} \\ -a_{21}+\rho b_{21} & 1+\rho b_{22}\cdots & -a_{2n}+\rho b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1}+\rho b_{n1} & -a_{n2}+\rho b_{n2}\cdots & 1+\rho b_{nn} \end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

條件 (13)에 있어서 行列A 및 行列B의 次數는 各各 $n\times n$次이며 ρ는 scalar이므로 scalar ρ와의 積 ρB도 역시 $n\times n$次의 行列이다.

따라서 行列 A 및 ρB의 和인 行列도 $n\times n$次 이고 K는 $n\times 1$次의 列 vector이므로 서로 適合하며 乘法이 可能하다. 따라서 그 積인 行列$(A+\rho B)K$는 $n\times 1$ 次의 列 vector이다. 그리고 (13)에 依하여 $(A+\rho B)K=0$ 이므로 n次인 列 vector$(A+\rho B)K$의 各 要素는 零과 같으므로 n個의 方程式이 成立한다. 그러므로 ρ 및 K의 要素의 比를 決定하는데 充分하다.

(14) 는 行列 $A=[a_{rs}]$ $(r, s=1, 2,\cdots,n)$인 正方行列 A의 特性(固有)行列 $A-\rho I$의 一般化된 形式이다. 그런데 $I=[\delta_{rs}]$ $(r, s=1, 2,\cdots,n)$, δ_{rs}는 Kronecker's delta이다.

여기에서 理解를 돕기 위해서 行列의 特性 또는 固有方程式에 關한 說明을 添加키로 한다.

A가 $n\times n$次의 正方行列이면

$$A-\rho I=[a_{rs}-\delta_{rs}\rho]=\begin{pmatrix} a_{11}-\rho & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\rho\ \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn}-\rho \end{pmatrix}$$

의 行列式 $|A-\rho I|=|a_{rs}-\delta_{rs}\rho|$를 完全히 展開하면 ρ에 關한 n次의 多項式으로 되고 이 多項式의 第一項은 $(-1)^n\rho^n$, 最後의 項은 定數項인 行列 A의 行列式 $|A|$임을 알수 있다 $|A-\rho I|=|a_{rs}-\delta_{rs}\rho|=0$ 를 正方行列 A의 特性 또는 固有方程式이라고 한다. 이것은 n次이므로 ρ에 關한 n個의 根을 가지며 이것이 곧 行列 A의 固有根인 것이다. 여기에서 最後의 項이 定數인 $|A|$이며 이것은 n個의 特性根의 積 $\rho_1\cdot\rho_2\cdots\rho_n$와 같으므로 $|A|\neq 0$이면 特性根은 모두가 零이 아님은 明白하다. 行列 A가 變則(特異)이면 $|A|=0$ 이므로 적어도 하나의 根은 零일 것이다 여기서는 A가 正方行列인 경우였으나 正方行列의 特殊한 例인 $A=[a_{rs}]$ $(r, s=1, 2,\cdots n)$에서 $a_{rs}=a_{sr}$ 곧 A가 對稱行列이면 行列 $A-\rho I$의 行列式 $|A-\rho I|=$

$|a_{rs}-\delta_{rs}\rho|=(\rho_1-\rho)(\rho_2-\rho)\cdots(\rho_n-\rho)=\phi(\rho)$ 임이 證明된다. 곧 이것은 ρ에 關한 n次의 多項式이며 $\phi(\rho)$는 對稱行列A의 固有函數. $\phi(\rho)=0$ 는 A의 固有(特性)方程式이다. 이 方程式은 ρ에 關한 n次의 方程式이며 이 方程式은 n個의 根 $\rho_1, \rho_2,\cdots,\rho_n$을 가진다. 이 根이 앞서 말한바와 같은 對稱行列 A의 固有(特性)根이다. (高木貞治著. 代數學講議 pp. 388—389 參照)

그런데 (13)에 있어서 列 vector $K=\{k_r\}$ $(r=1,2,\cdots,n)$의 要素 K_r는 모두가 零은 아니다. 따라서 行列 $A+\rho B$의 行列式

$$|A+\rho B|=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

이것은 앞서 말한바와 같이 ρ에 關한 n次의 方程式이다. ρ의 係數는 一定한 것으로 假定한 投入係數 및 資本係數에 依存함은 (15)에 의하여 明白하다. 方程式 (15)는 n個의 根 $\rho_1, \rho_2,\cdots,\rho_n$을 가지며 行列 A 및 B는 對稱行列이 아닐 것이므로 그根 ρ가 모두 實數의 範圍內에 있다고는 할수 없을 것이다. 만약에 根의 ρ가 共軸複素根일 경우에는 産出量의 振動的 時間經路를 이룩하게 될 것이다.

根이 $\rho=\rho_s$ 일때 ρ_s에 對應하는 k의 任意의 特定된 組를 $K_s=[k_{rs}]$로 한다. 行列 $(A+\rho_s B)$의 行列式은 $|A+\rho_s B|=0$ 이므로 行列 $(A+\rho_s B)$의 階數를 r로 하면 $r<n$ 이다 곧 $(A+\rho_s B)$는 變則(特異)이다. 그러므로 階數를 $r=(n-1)$로 하면 方程式$(A+\rho B)K=0$ 는 $K=\{k_r\}$의 要素間의 比를 決定한다.

이렇게 하여 方程式 $AX=B\mathring{X}$ 또는 $AX=B\dfrac{dX}{dt}$의 하나의 解는

$$X=K_s e^{-pst}$$

로 된다. 그러므로$(S=1, 2,\cdots,n)$에 對應하는 n個의 特殊解의 一次結合으로 이루어지는 다음과 같은 一般解를 얻는다.

$$X=\sum_{s=1}^{n} A_s K_s e^{-pst}$$

여기에서 A는 初期條件에 의해서 決定되는 任意常數다

이 一般解에 있어서 ρ의 값의 性質 곧 實數値를 갖느냐 또는 共軸複素數를 갖느냐에 따라서 産出量X의 時間的 經路에 있어서 그 運動의 形態가 決定될 것이다. (끝)