미국 시장금리가 우리나라 수익률곡선에 미치는 비대칭적 영향 분석*

정 현 석** · 강 규 호***

논문초록 최근 미국 금리 인상은 시장 기대 등을 통해 국내 수익률곡선에 상당한 영향을 줄 수 있을 뿐만 아니라, 채권만기와 경제 상태에 따라서 파급효과가 비대칭적일 수 있다. 이에 본 연구는 2001년 이후 미국 금리 변동의 국내 수익률곡선에 대한 비대칭적 동태적 파급효과를 분석하고 이를 바탕으로 통화정책적 시사점을 모색하고자 한다. 정량적 분석을 위해 본 연구는 Diebold, Rudebusch, Aruoba(2006)의 동태적 Nelson-Siegel 모형에 거시관측인자와 레짐변화를 고려한 모형을 제시하고 베이지안 MCMC 기법으로 추정하였다. 추정결과는 크게 세 가지로 요약된다. 첫째, 우리나라 수익률곡선의 동태성은 저변동성과 고변동성 상태로 구분된다. 둘째, 미국 단기금리는 국내 채권시장의 상태와 무관하게 우리나라 수익률 곡선에 유의미한 영향을 미치지 못하는 것으로 나타났다. 셋째, 고변동성 상태에서 미국 장기금리 1%p 상승은 국내 장기금리를 0.3%p 내외로 상승시키는 것으로 나타났다. 반면 저변동성 상태에서의 효과는 미미하였다. 본 연구는 미국 금리 변동의 국내 금리에 대한 비대칭적 영향을 정량적으로 분석하여 한국은행의 선제적이고 유효한 대응수단 마련에 기여할 것으로 기대된다.

핵심 주제어: 마코프-스위칭 모형, 베이지안 MCMC 알고리즘, 충격반응함수
경제학문헌목록 주제분류: G12, C11, E43

투고 일자: 2017. 5. 17. 심사 및 수정 일자: 2017. 9. 12. 게재 확정 일자: 2017. 11. 17.
* 이 논문 또는 저서는 2015년 대한민국 교육부와 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (NRF-2015S1A5A8011737).
** 제1저자, 한국은행 경기본부 조사역, e-mail: hsj@bok.or.kr
*** 교신저자, 고려대학교 경제학과 부교수, e-mail: kyuho@korea.ac.kr

Ⅰ. 서 론

본 연구는 미국 금리가 우리나라 금리에 미치는 영향에 대한 비대칭성을 분석하는 것을 주된 목적으로 한다. 비대칭성은 미국 장기금리와 단기금리에 대한 영향의 차이, 경제 상태의 여건 차이 등에서 나타날 수 있다. 이와 관련된 분석을 위해 Diebold et al. (2006)이 제시한 동태적 Nelson-Siegel 모형을 통해 우리나라 금리 기간구조(term structure of interest rates)를 도출하였다. 아울러 외부관측인자인 미국채 장·단기 수익률과 경제 상태의 변화를 파악할 수 있는 마코프 레짐 스위칭(Markov regime switching) 과정을 추가하였다. 그리고 해당 모형을 통해 미국채 장·단기금리 충격에 대한 우리나라 금리 기간구조의 영향 정도가 변동성 상태에 따라 어떤 차이가 나타나는지 살펴보고 이로부터 한국은행 통화정책과 관련된 시사점을 도출하고자 한다.

금리기간구조는 통화정책에 있어서 중요한 요소이다. 중앙은행이 정책금리를 조정하면 단기시장금리와 함께 장기시장금리 및 은행 여수신금리가 조정되어 총수요에 변화를 주게 된다. 장기시장금리는 대체로 중앙은행의 정책금리 방향에 맞게 변동하지만 시장참가자들의 인플레이션 기대, 유동성 프리미엄 등에 따라 다르게 움직이기도 한다.[1] 한편 글로벌 금융위기 이후 글로벌 시장금리간의 상관성이 점차 높아지고 있으며, 우리나라의 경우 특히 미국 국채 금리의 영향을 유의미하게 받는 것으로 알려져 있다.

미국 금리는 주로 시장 기대(market expectation) 경로를 통해 국내 금리에 파급되는데, 그 효과는 채권만기와 경제상태에 따라 상이할 수 있다. 미국 단기금리가 미국의 통화정책에 크게 영향 받는다면, 장기금리는 미래 기대금리와 기간프리미엄에 따라 변화한다. 그러므로 우리나라 시장금리는 미국 장기금리 변동에 더 민감하게 반응할 수 있다. 따라서 미국채 장·단기금리가 미치는 영향을 구분하여 살펴볼 수 있다면 대외요인 중 어떤 요인이 우리나라 수익률곡선을 변화시키는지 확인할 수 있다. 아울러 경제 상태를 안정적인 시기와 불안정인 시기로 구분하여 우리나라 금리기간구조를 추정한다면 추정의 정확성을 제고할 수 있을 것이다. 국가간 경기

---

1) 2000년대 중반 당시 연방준비제도위원회는 2004년 6월부터 2006년 3월까지 기준금리를 3.75% 올렸으나 10년 만기 미 국채수익률은 4.62%에서 4.85%로 0.23%포인트 오르는 데 그쳤다.

가 비대칭적인 국면에서는 금리 동조화가 약화되는 경향이 있을 수 있다. 예컨대 글로벌 금융위기의 사례[2]에서 볼 수 있듯이 경제 여건의 변동성이 급격히 확대될 경우 우리나라의 시장금리는 미국의 금리의 변화에 크게 영향받을 가능성이 있다. 이처럼 미국 금리의 국내 금리 파급효과를 정량적으로 분석함에 있어 파급효과의 비대칭성은 반드시 고려될 필요가 있다. 그렇지 않으면 파급효과가 과대 또는 과소 추정되어 이에 근거한 정책대응은 충분한 효과를 나타내지 못할 것이다. 특히 미 연준의 정책금리 정상화[3] 등으로 미국채 금리가 큰 폭 상승하고 있는 최근 상황에서 미국채 금리가 우리나라 수익률곡선에 미치는 파급효과를 경제 상태가 안정적일 경우, 불안정적일 경우로 구분지어 분석하는 것은 시의성 있는 연구라 판단된다.

이에 따라 본 연구에서는 2001년 이후 우리나라의 수익률곡선이 미국 장·단기 금리에 의해 영향받는 정도를 동태적으로 분석하고자 하였다. 이를 위해 Diebold et al. (2006)이 제안한 동태적 Nelson-Siegel(DNS) 모형을 기반으로 레짐변화와 외부관측인자가 포함된 금리기간구조 모형을 새롭게 설정한 뒤, 베이지안 MCMC 기법을 통해 추정하였다. 해당 모형에서는 미국 금리의 비대칭적 파급효과를 두가지 측면에서 고려하였다. 우선 만기별 비대칭적 효과가 분석될 수 있도록 미국 단기 및 장기금리 충격에 대한 국내 시장금리의 충격반응함수를 추정하였다. 또한 모형에 마코프 레짐 스위칭(Markov regime switching) 과정을 도입하여 우리나라 수익률곡선 잠재요인들의 충격반응함수를 레짐별로 추정함으로써 국내 채권시장의 상태에 따른 파급효과의 비대칭성 여부를 분석하였다. 그리고 여기서 도출된 분석결과를 바탕으로 한국은행의 통화정책적 시사점을 모색하였다.

한편 기간구조 분석에 있어 DNS 형태에 무재정차익(no-arbitrage) 조건을 부과한 선형기간구조 모형 또한 자주 사용된다. 잘 알려진 바와 같이 무재정차익 선형기간구조 모형은 기간 프리미엄 도출 등 이론적인 측면에서 상대적인 장점이 있다. 그럼에도 불구하고 DNS 모형에 비해 in-sample-fit이나 예측력이 떨어진다는 한계가 있다. 특히 무재정차익 선형기간구조 모형에 레짐 변화를 고려했을 때, 이론적인 채권가격 도출이 용이하지 않을 뿐만 아니라, 계량적인 추정 또한 상당히

2) 글로벌 금융위기시 미국은 장·단기금리가 큰 폭 떨어졌으며 동기간 우리나라 금리도 큰 폭의 하락이 나타났다.

3) 옐렌 연준의장은 2016년 12월 FOMC 회의 기자간담회에서 2017년 중 정책금리 인상이 3회 이상 있을 수 있다고 시사하였다.

난해하다. 이 때문에 본 연구에서는 통계적 모형인 DNS 모형 접근법을 도입하였다.

본고의 구성은 다음과 같다. 제Ⅱ장에서는 글로벌 시장금리 동조화 현상 및 글로벌 금리와 우리나라 금리기간구조와의 관계와 관련된 국내외 선행연구를 소개하였으며 기존 연구와 본 연구와의 차별점을 밝혔다. 제Ⅲ장에서는 일반적인 동태적 Nelson-Siegel 모형에 미국채 장·단기 수익률과 변동성 레짐변화를 추가한 모형을 제시하였다. 또한 이 모형을 바탕으로 한 충격반응함수 도출에 대하여 설명하였다. 제Ⅳ장에서는 제시된 모형의 사전분포와 식별제약을 설명하고 베이지안 MCMC 추정방식을 소개하였다. 제Ⅴ장에서는 도출된 금리기간구조 모형의 모수 추정치를 제시하고 충격반응함수 추정결과를 해석하였다. 제Ⅵ장에서는 본고의 연구결과를 바탕으로 시사점을 도출하고 추후 필요한 연구과제 등을 논의하였다.

Ⅱ. 선행연구

글로벌 금리 요인과 개별 국가 금리기간구조와의 관련성에 대한 연구는 다수 있었다. Diebold, Li and Yue(2008)는 독일, 일본, 영국, 미국 등 4개국의 금리로부터 추출한 수준과 기울기 요인이 개별 국가의 금리기간구조 변동의 상당 부분을 설명할 수 있다고 주장하였다. Modugno and Nikolaou(2009)는 미국, 독일, 영국을 대상으로 분석한 결과 독일과 영국의 경우 금리기간구조 예측에 다른 나라의 금리기간구조가 도움이 되었으나, 미국의 경우 다른 나라의 금리기간구조가 별다른 영향을 미치지 못함을 발견하였다. 또한 Ken et al. (2012)에 따르면 11개 신흥국(한국 포함)을 대상으로 분석한 결과, 미국 장기시장금리(국채 10년물 기준)가 1%p 상승할 경우 신흥국 장기시장금리는 2000∼2007년중에 0.37%p가, 2008∼2011년중에는 0.60%p가 상승하는 것으로 나타났다. Turner(2013)는 8개 신흥국(한국 포함)을 대상으로 분석한 결과, 미국 장기시장금리(국채 10년물 기준)가 1%p 상승할 경우 신흥국 장기시장금리는 2000∼2004년중에 0.35%p 상승하는데 그쳤으나, 2005∼2012.3/4분기 중에는 0.51%p가 상승함을 보였다. 한편 Abbritti et al. (2013)의 분석에서도 수준, 기울기, 곡도 요인이 주요 선진국의 장기금리에 지대한 영향을 주는 것으로 추정하였으며, IMF는 GFSR(Global Financial Stability Report, April, 2014)에서 캐나다, 독일, 일본, 영국의 기간프리미엄이 미국 기간프

리미엄에 유의하게 반응한다고 주장하였다.

국내에서도 최근 들어 이와 관련된 연구가 다수 진행되었으며 대표적으로 김도완(2011), 김도완・오형석(2014), 강태수・이병주(2014), 강규호・오형석(2015)를 들 수 있다. 이중 김도완(2011)은 2국가(한국, 미국) Nelson-Siegel 모형을 구축하고 수익률 곡선을 추정하였으며, 해외요인(미국 수익률 곡선)을 고려할 경우 우리나라 수익률곡선에 대한 예측력이 통계적으로 우월해짐을 보였다. 또한 김도완・오형석(2014), 강태수・이병주(2014)는 Nelson-Siegel 모형을 활용하여 글로벌 금융위기 이후 미국 수익률곡선이 우리나라 수익률곡선에 미치는 영향력이 확대되었다고 분석하였다. 강규호・오형석(2015)은 미국 장기금리가 포함된 Affine Term-Structure 모형을 활용하여 우리나라 수익률곡선이 2008년 12월에 구조변화가 발생했음을 입증하였으며, 동 구조변화 이후 미국 장기금리가 우리나라 장기금리에 미치는 영향력이 증대되었음을 밝혔다.

본고는 미국채 금리가 한국 수익률곡선에 미치는 영향을 살펴봤다는 점에서 위에서 언급한 국내선행 연구들과 유사하지만, 경제상태와 대외요인의 만기에 따른 비대칭성을 살펴봤다는 점에서 뚜렷한 차이점이 있다. 먼저, 우리나라 수익률곡선에 발생할 수 있는 경제상태 변화를 식별할 수 있도록 레짐을 추가한 모형을 설계하였다. 경제 상태에 따라 모형의 변수가 미치는 효과는 달라질 수 있다. 예컨대 불황일 때와 호황일 때의 정책금리 인하의 효과는 다르게 나타날 것이다. 특히 외환위기나 글로벌 금융위기 때와 같은 금융불안시의 금융가격변수를 살펴보면 금융안정기에 비해 변동성이 크게 달라지는 것을 확인할 수 있다. 이러한 관계 변화가 무시되면 예측의 정확도가 떨어질 것이다. 기존의 연구에서도 이러한 점을 일부 고려하였다. 예를 들어 강태수(2014)의 경우에는 글로벌 금융위기 기간을 임의로 정해 나누었으며 강규호・오형석(2015)은 항구적인 구조변화 시점을 찾아내었다. 그러나 본 연구에서는 금융시계열의 상태를 구분하여 전 시계열에 걸쳐 금융불안시기를 찾아내려 했다는 점에서 차이가 있다. 이를 위해 레짐변화를 상태변수 형태로 모형 내에 포함시켜서 경제 상황에 따라 고변동성 상태와 저변동성 상태가 번갈아가며 나타난다고 가정하였다. 또한, 본 연구의 다른 차별점은 미국의 장・단기시장금리를 나누어서 각각 우리나라 금리기간구조에 직접 미치는 영향을 살펴보았다는 점이다. 강태수(2014), 김도완・오형석(2015)은 미국 금리기간구조의 수준, 기울기, 곡도 요인의 충격을 분석하였다. 하지만 통화정책의 파급효과를 분석함에 있어 미

국 금리의 잠재요인보다는 시장금리의 변화가 직접적으로 미치는 영향을 살펴보는 것이 더 적절하다고 판단된다. 한편 강규호・오형석(2015)의 경우에는 미국 장기금리에 국한하여 파급효과를 알아보았으나 미국 금리의 영향력은 장기금리 뿐만 아니라 단기금리에 대해서도 분석하는 것이 모형의 정합성을 더 제고할 수 있다고 보인다. 아울러, 강태수(2014), 김도완・오형석(2015) 등은 미국과 한국 금리기간구조 모형을 개별적으로 도출하였으나 미국채 금리가 우리니라 금리에 미치는 영향을 동태적으로 살펴보기 위해서는 외부관측인자를 단일 모형에 편입시키는 것이 더 적절할 것이다. 이를 종합하여 본 연구는 미국채 장・단기금리 변동이 외생적으로 우리나라 수익률곡선에 영향을 미칠 수 있도록 하나의 금리기간구조 모형을 설정하였다.

Ⅲ. 모형 설정

1. 레짐변화와 외부관측인자를 고려한 동태적 Nelson-Siegel 모형

일반적인 DNS 모형[4]에서는 금리기간구조 요인의 효과가 시점별로 일정하다고 가정하고 있다. 하지만 금리의 변동성이 클 때와 작을 때 요인의 효과는 시점에 따라 다를 수 있다. 이 때 S_t를 t시점의 변동성을 나타내는 상태변수라고 하고 t시점의 변동성이 작으면 $S_t=1$, 변동성이 크면 $S_t=2$라고 하자. 이제 모형의 모수들의 집합을 θ라고 하면 θ는 상태변수 S_t에 의존하므로 θ는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\theta_{S_t}=\begin{cases}\theta_1, & \text{if } S_t=1\\ \theta_2, & \text{if } S_t=2\end{cases}$$

현실적으로 상태변수 S_t는 정확하게 관측되지 않기 때문에 상태변수의 확률과정(stochastic process)을 마코프-스위칭(Markov-switching) 과정으로 가정하여 식 (A. 1) (〈부록 1〉 참조)에 추가한다. 마코프-스위칭 과정은 초기 상태 S_0와 전환확

4) 자세한 내용은 〈부록 1〉 '동태적 Nelson-Siegel 모형'을 참조하기 바란다.

률(transition probability) P에 의해 정의된다. 초기 상태 S_0가 1 또는 2로 주어지면 마코프-스위칭 확률과정은 전환확률 P에 의해 결정된다.

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

p_{ij}는 t시점의 상태가 $S_t=i$일 때, 다음 시점의 상태가 $S_{t+1}=j$로 전환될 확률을 말한다. 예컨대 p_{11}이 1에 가까울수록 상태 1에 일단 진입하면 상태 1이 지속될 가능성이 높아지는 것을 의미한다.

한편, 외부관측인자로는 미국채 단기(3개월) 금리와 장기(10년) 금리를 이용한다. 이는 일반적으로 단기금리로 3개월물 금리가, 장기금리로는 10년물 금리가 가장 대표성을 띠고 있다고 판단되기 때문이다. 미국채 장·단기금리는 직접적으로 우리나라 채권 수익률에 영향을 미치는 것은 아니지만, 금리 기간구조의 잠재요인인 수준, 기울기, 곡률 요인에 영향을 미쳐서 간접적으로 금리 기간구조에 영향을 준다고 가정한다. 즉, 외부관측인자는 전환식에서는 변수로 취급되나 측정식에서는 변하지 않는 상수로 취급된다. 이를 상태-공간 모형으로 표현하면 다음과 같다.

〈측정식 (measurement equation)〉

외부관측인자인 미국채 장·단기금리 벡터를 m_t라 하고 국채 수익률을 y_t라 하자. 외부관측인자를 상수로 취급하였으므로 다음과 같이 개별적인 식으로 표현할 수 있다.

$$m_t = m_t, \tag{1}$$

$$y_t(\tau_i) = \Lambda(\tau_i) \times \beta_t + e_t(\tau_i),\ \text{단,}\ y_t(\tau) | \beta_t \sim N(\Lambda(\tau) \times \beta_t, \Sigma) \tag{2}$$

단, $m_t = [m_{1t}, m_{2t}]'$, $y_t = [y_t(\tau_1), \cdots, y_t(\tau_N)]'$,

$$\Lambda(\tau_i) = [1, \frac{1-e^{-\tau_i \lambda}}{\tau_i \lambda}, (\frac{1-e^{-\tau_i \lambda}}{\tau_i \lambda} - e^{-\tau_i \lambda})],$$

$\beta_t = [Level_t, Slope_t, Curve_t]'$, $\Sigma = diag(\sigma_{\tau_1}^2, \cdots, \sigma_{\tau_N}^2)$이다.

이제 식 (1)과 식 (2)를 행렬로 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} m_{1t} \\ m_{2t} \\ y_t(\tau_1) \\ \vdots \\ y_t(\tau_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0_{2\times 3} \\ 0_{1\times 2} & \Lambda(\tau_1) \\ \vdots & \vdots \\ 0_{1\times 2} & \Lambda(\tau_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1t} \\ m_{2t} \\ \beta_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2\times 1} \\ e_t(\tau_1) \\ \vdots \\ e_t(\tau_N) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0_{2\times 3} \\ 0_{N\times 2} & \Lambda \end{bmatrix} \times f_t + \begin{bmatrix} 0_{2\times 1} \\ e_t(\tau_1) \\ \vdots \\ e_t(\tau_N) \end{bmatrix} \tag{3}$$

단, $f_t = [m_{1t}, m_{2t}, Level_t, Slope_t, Curve_t]'$,

〈전환식 (transition equation)〉

앞서 기술한 바와 같이 외부관측인자와 잠재요인은 함께 VAR(1) 과정을 따른다. 또한 상태에 따라 변수의 영향이 달라진다고 가정하였으므로 모수에 상태변수 S_t를 추가한다. 추정 모수의 집합을 θ라고 하면 아래와 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$f_t | f_{t-1}, \theta, S \sim N(\mu_{s_t} + G_{s_t} f_{t-1}, \Omega_{s_t}) \tag{4}$$

μ_{S_t}는 방정식에서의 절편을, G_{S_t}는 설명변수 f_{t-1}에 대한 계수를 의미한다. 또한 Ω_{s_t}는 전환식의 분산-공분산 행렬이다. Ω_{s_t}는 식 (5)와 같이 네 부분으로 구분지을 수 있는데, 이는 후에 제약을 부여할 때 사용하게 된다.[5]

$$\Omega_{s_t} = \begin{bmatrix} \Omega_{1,1,s_t} & \Omega_{1,2,s_t} \\ \Omega_{2,1,s_t} & \Omega_{2,2,s_t} \end{bmatrix} \tag{5}$$

단, $\Omega_{1,1,s_t} = \begin{bmatrix} \omega_{1,1,s_t} & \omega_{1,2,s_t} \\ \omega_{2,1,s_t} & \omega_{2,2,s_t} \end{bmatrix}$, $\Omega_{1,2,s_t} = \begin{bmatrix} \omega_{1,3,s_t} & \omega_{1,4,s_t} & \omega_{1,5,s_t} \\ \omega_{2,3,s_t} & \omega_{2,4,s_t} & \omega_{2,5,s_t} \end{bmatrix}$,

5) 식별제약에 대한 내용은 Ⅳ장의 1. 사전분포 및 식별제약 부분을 참고하기 바란다.

$$\Omega_{2,1,s_t} = \Omega'_{1,2,s_t}, \quad \Omega_{2,2,s_t} = \begin{bmatrix} \omega_{3,3,s_t} & \omega_{3,4,s_t} & \omega_{3,5,s_t} \\ \omega_{4,3,s_t} & \omega_{4,4,s_t} & \omega_{4,5,s_t} \\ \omega_{5,3,s_t} & \omega_{5,4,s_t} & \omega_{5,5,s_t} \end{bmatrix}$$

2. 충격반응함수 도출

다음 단계는 상태방정식으로부터 충격반응함수를 도출하는 것이다. 이를 위해서는 먼저 상태방정식을 축약식(reduced form)으로 표현해야 한다. 이 축약식에 대응하는 구조식(structural form)은 식 (6)과 같은 동태적 연립방정식(Dynamic Simultaneous Equations)의 형태이다.

$$B_{S_t} f_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 f_{t-1} + e_t \,, \ e_t \sim i.i.d.(0, I) \tag{6}$$

단, B_{S_t}는 상태($S_t = 1$ or $S_t = 2$)에 따라 달라진다.

그런데 식 (6)에서는 모형구조상 동시성(simultaneity)으로 인해 오차항과 설명변수간의 상관관계가 존재하는 내생성(endogeneity) 문제가 발생하게 되므로 이와 같은 구조식 대신 실제 추정과정에서는 다음과 같은 축약식이 사용된다. 식 (6)에서 양변에 B_{S_t}행렬의 역행렬을 곱하면 식 (7)을 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned} f_t &= B_{S_t}^{-1}\Gamma_0 + B_{S_t}^{-1}\Gamma_1 f_{t-1} + B_{S_t}^{-1} e_t \\ &= \mu_{S_t} + G_{S_t} f_{t-1} + u_t \end{aligned} \tag{7}$$

단, $\mu_{S_t} = B_{S_t}^{-1}\Gamma_0, \quad G_{S_t} = B_{S_t}^{-1}\Gamma_1, \quad u_t \sim (0, \Omega_{S_t}), \quad \Omega_{S_t} = B_{S_t}^{-1} B_{S_t}^{-1\prime}$

이제 월드(Wold) 형태를 만들기 위해 식 (7)을 정리하면,

$$\begin{aligned} f_t &= \mu_{S_t} + G_{S_t} f_{t-1} + u_t \\ &= \mu_{S_t} + G_{S_t}(\mu_{S_{t-1}} + G_{S_{t-1}} f_{t-2} + u_{t-1}) + u_t \\ &= \mu_{S_t} + G_{S_t}\mu_{S_{t-1}} + G_{S_t} G_{S_{t-1}} f_{t-2} + G_{S_t} u_{t-1} + u_t \end{aligned} \tag{8}$$

를 얻게 된다. 동일한 과정을 반복하면 아래와 같은 월드(Wold) 형태를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} f_t &= u_t + G_{S_t} u_{t-1} + G_{S_{t-1}} G_{S_t} u_{t-2} + G_{S_{t-2}} G_{S_{t-1}} G_{S_t} u_{t-3} + \cdots) \\ &= B_{S_t}^{-1} e_t + G_{S_t} B_{S_t}^{-1} e_{t-1} + G_{S_{t-1}} G_{S_t} B_{S_t}^{-1} e_{t-2} + G_{S_{t-2}} G_{S_{t-1}} G_{S_t} B_{S_t}^{-1} e_{t-3} + \cdots \end{aligned} \tag{9}$$

한편 미국채 금리 및 한국 금리기간구조 잠재요인들의 상호간의 관계를 나타내는 G_{S_t}는 t시점의 상태에 따라 $G_{S_t=1}$와 $G_{S_t=2}$, 2가지 형태로 존재하게 된다. 다만, 마코프-스위칭 과정에서는 같은 상태로 유지될 확률이 상태가 전환될 확률보다 월등히 높다는 점을 감안하여, 본고에서는 충격이 왔을 당시의 변동성 상태가 계속 지속된다고 가정하였다. 이를 감안하여 식 (9)를 다시 기술하면,

안정상태일 때 충격이 발생한 경우:

$$\begin{aligned} f_t &= B_{S_t=1}^{-1} e_t + G_{S_t=1} B_{S_t=1}^{-1} e_{t-1} + G_{S_t=1}^2 B_{S_t=1}^{-1} e_{t-2} \\ &\quad + G_{S_t=1}^3 B_{S_t=1}^{-1} e_{t-3} + \cdots \end{aligned}$$

불안정상태일 때 충격이 발생한 경우 :

$$\begin{aligned} f_t &= B_{S_t=2}^{-1} e_t + G_{S_t=2} B_{S_t=2}^{-1} e_{t-1} + G_{S_t=2}^2 B_{S_t=2}^{-1} e_{t-2} \\ &\quad + G_{S_t=2}^3 B_{S_t=2}^{-1} e_{t-3} + \cdots \end{aligned}$$

와 같이 표현될 수 있다. 따라서 충격반응함수는

$$\frac{\partial f_t}{\partial e_{t-i}} = G_{S_t=1 \text{ or } 2}^i \times B_{S_t=1 \text{ or } 2}^{-1} \tag{10}$$

로 결정된다. 충격반응함수 계산을 위해서는 B_{S_t}행렬을 추정하는 것이 필요한데, 이 과정에서 제약조건으로 축약식에서 추정된 잔차항의 분산·공분산 행렬(Ω)에 Cholesky 분해($B^{-1} = chol(\Omega)$[6])를 이용하였다. Cholesky 분해방법에서의 제약조건은 변수들간의 상대적인 외생성의 차이를 의미한다. 본 연구에서는 우리나라가

소규모 개방경제임을 감안하여 대외요인이 우리나라 국채수익률의 요인보다 상대적으로 외생적이라고 가정하였다. 따라서 수익률결정모형에서의 순서는 미국채 단기금리, 미국채 장기금리, 우리나라 금리기간구조의 수준요인, 기울기요인, 곡률요인 순으로 이루어진다.

Ⅳ. 추정방법

1. 사전분포 및 식별제약

식 (3)과 식 (4)로 표현되는 모형에서 추정해야 할 모형 파라미터들은 측정식의 Σ의 대각원소들과 상태변수 전환확률 P, 그리고 전환식의 μ_{S_t}, G_{S_t}, Ω_{S_t}, P_{S_t} 이다. 모형 설정을 위해 각 파라미터들에 대한 사전분포를 설정해야 한다. 이 모수들의 집합을 θ라 하기로 한다.

$$\theta = (\Sigma,\ P,\ \mu_{S_t},\ G_{S_t},\ \Omega_{S_t})$$

μ_{S_t}, G_{S_t} 는 정규분포를 따른다고 가정한다. 이때, f_t의 확률과정이 안정계열이므로 G_{S_t}에 대한 안정계열 조건이 만족되어야 하며, 이는 아래에서 기술하도록 하겠다. 한편 Ω_{S_t}에 대해서는 역위샤르트 분포를 사전분포로 가정하며, Σ의 대각원소들인 측정오차의 분산들 $(\sigma^2_{\tau_1}, \sigma^2_{\tau_2}, \cdots, \sigma^2_{\tau_N})$에 대해서는 각각 역감마 분포를 가정한다. 아래는 θ에 대한 구체적인 사전분포 및 초기값이다.

$$\mu_{s_t} \sim N(\overline{\mu} = 0_{10\times 1},\ \overline{V}_{\mu} = 0.01 \times I_{10})$$

$$vec(G_{S_t}) \sim N(vec(\overline{g}), \overline{V}_g), \overline{g} = [1,\ 1] \otimes (0.95 \times I_5),\ \overline{V}_g = 0.25 \times I_{50}$$

$$\Omega_{s_t = 1\,\text{or}\,2} \sim Inverse\ Wishart(k_0 = 1, R_0 = (0.15 \times I_5)^{-1} \times k_0)$$

$$5000 \times \sigma^2_{\tau, i} \sim Inverse\,Gamma(v_0/2, \delta_0/2), v_0 = 20, \delta_0 = 20,\ i = 1,2,\cdots, N$$

---

6) Cholesky 분해방법 외에도 부호제약(sign restriction) 방식 등 여러 보수 추정방식이 있으나 본고는 Diebold et al. (2006)의 방식을 준용하여 Cholesky 분해방식을 이용하였다.

$$S \sim Markov(S_0,\ P)$$
$$p_{11} \sim B(a_{1,0} = 50,\ b_{1,0} = 5)$$
$$p_{22} \sim B(a_{2,0} = 5,\ b_{2,0} = 50)$$

한편 본고에서의 식별제약은 다음과 같다. 첫째, f_t의 확률과정이 안정계열이므로 G_{S_t}가 안정계열 조건을 만족해야 한다. 따라서 MCMC 반복시행에서 G_{S_t}의 eigen-value의 절대값이 모두 1보다 작으면 해당 값을 저장하고, 해당 조건을 만족시키지 못하면 그 전에 추출했던 값을 사용한다. 둘째, 고변동성 상태와 저변동성 상태를 구분하기 위한 제약을 부여한다. 이를 위해 식 (5)에서 정의한 $\Omega_{2,2,S_t=1}$과 $\Omega_{2,2,S_t=2}$를 이용하여 $1'_N \Lambda \Omega'_{2,2,S_t=1} \Lambda 1_N$과 $1'_N \Lambda \Omega'_{2,2,S_t=2} \Lambda 1_N$를 계산하여 $1'_N \Lambda \Omega'_{2,2,S_t=1} \Lambda 1_N < 1'_N \Lambda \Omega'_{2,2,S_t=2} \Lambda 1_N$ 를 만족하는 경우에만 해당 시행의 Ω_{S_t}를 저장한다. $\Omega_{2,2,S_t}$는 Ω_{S_t}에서 한국 금리 요소만을 추출해낸 것이고 $1'_N \Lambda \Omega'_{2,2,S_t} \Lambda 1_N$는 $\Omega_{2,2,S_t}$가 측정식을 통해 미치는 한국 수익률 변동성의 크기(scalar)이다. 따라서 이 둘을 비교함으로써 변동성의 크기를 비교할 수 있다. 셋째, 한국 금리기간구조 잠재요인이 미국 국채 수익률에 영향을 미치지는 않는다고 가정한다. 일반적으로 개별 신흥국의 금리 변동이 미국 등 선진국에 직접적으로 영향을 미친다고 보기 어렵기 때문이다. 따라서 G_{S_t} 행렬 요소 값들인 $g_{ij}\ (i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$ 중 $g_{13}, g_{14}, g_{15}, g_{23}, g_{24}, g_{25}$ 값에 대해서는 0이 도출되도록 제약을 부여한다. 이를 위해 사전분포에서 해당값의 초기값을 0에 매우 근접한 값으로 설정하였다. 이와 같이 베이지안 기법에서는 사전에 강한 믿음이 있을 경우, 사전분포 및 초기값에 강한 조건을 부여함으로써 해당 값에 제약을 부여할 수 있다.

2. 베이지안 MCMC 추정과정

본 장에서 도입한 모형의 추정은 베이지안 MCMC 방법에 의해 이루어진다. 베이지안 방법으로 모형을 추정할 경우 추정모수가 많고 제약조건이 복잡한 경우에도 모형 추정이 용이하다는 장점이 있다. 식 (3)과 (4)로 구성된 상태공간모형의 모수는 베이지안 MCMC 기법중 하나인 깁스 샘플링(Gibbs-sampling)을 통해서 추정할

수 있다. 깁스 샘플링 알고리즘은 아래의 6단계로 구성된다.[7] 시행횟수는 6단계까지의 과정을 20,000번 반복한 다음 초기 10,000번을 버리고(burn-in) 남은 10,000번의 샘플링을 사후분포에서 샘플링한 것으로 채택하였다. 각 단계별 상세한 추정 과정 및 방법은 〈부록 2〉를 참조하기 바란다.

1단계 : f, Ω_{S_t}, S가 주어져 있을 때 $\mu_{S_t}, G_{S_t} | f, \Omega_{S_t}, S$로부터 μ_{S_t}와 G_{S_t}를 샘플링한다.

2단계 : μ_{S_t}와 G_{S_t}가 샘플링되고 난 후 μ_{S_t}, G_{S_t}, f, S가 주어져있을 때 $\Omega_{S_t} | f, \mu_{S_t}, G_{S_t}, S$로부터 각각 $\Omega_{S_t=1}$, $\Omega_{S_t=2}$를 샘플링한다.

3단계 : Y와 f가 주어져 있을 때, $\Sigma | Y, f$로부터 Σ를 샘플링한다.

4단계 : Y와 θ가 주어져 있을 때, Carter and Kohn 기법에 따라 f를 샘플링한다. 단, $\theta = (\Sigma, P, \mu_{S_t}, G_{S_t}, \Omega_{S_t})$

5단계 : $S | Y, \theta$로부터 S를 샘플링한다.

6단계 : $P | S$ 로부터 P 를 샘플링한다.

Ⅴ. 추정결과 및 해석

1. 자료(data)

본고에서는 2001년 1월부터 2017년 8월까지 한국과 미국의 월별[8] 국채수익률을 활용하였다. 한국 수익률자료는 한국자산평가(주), 미국채 금리는 Bloomberg가 제공하는 자료를 사용하였다. 국채 수익률의 만기는 3, 6, 12, 24, 36, 60, 120개월의 7개 만기를 사용하였으며 미국채 단기 및 장기 수익률로는 3개월, 120개월 만기를 사용하였다. 이는 일반적으로 단기금리로 3개월물 금리가, 장기금리로는 10

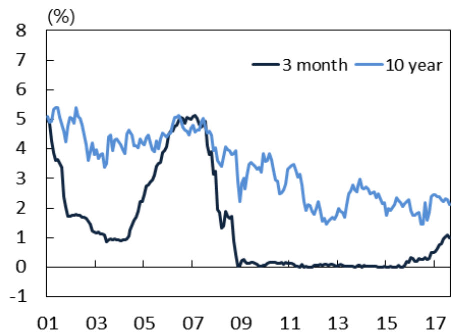
7) 깁스 샘플링은 다른 모수의 값이 주어진 상황에서 특정 모수에 대한 조건부 사후분포가 유도 가능할 때 적용할 수 있는 MCMC 기법이다. 깁스 샘플링에 대한 보다 자세한 사항은 Kim and Nelson(1999)을 참조하길 바란다.

8) 일별 종가 기준 월말 수익률 자료를 활용하였다. 월평균 수치를 사용하지 않은 이유는 본고가 변동성을 측정하는 것에 주안점을 두고 있기 때문이다. 월평균 값을 이용할 경우 금리의 변동이 평탄화(smoothing)되기 때문에 변동성 상태 추출에 있어서는 적절하지 않다고 판단된다.

년물 금리가 가장 널리 사용되고 있기 때문이다. 〈Figure 1〉과 〈Figure 2〉는 분석 대상 기간중 우리나라와 미국 3개월 및 10년 만기 국채수익률의 추이를 나타낸 것이다.

〈Figure 1〉 Government bond yields in Korea

〈Figure 2〉 Government bond yields in U.S.



2. 모형 추정 결과

아래에 제시되어 있는 〈Table 1〉은 본고와의 모형 비교를 위해 레짐을 추가하지 않은 모형에 대한 추정결과이다. 한편 〈Table 2〉는 본고에서 기술하였던 상태변수와 외부관측인자를 모두 고려한 DNS 모형에 대한 추정결과와 사후표준편차이다. 모형에 대한 개략적인 개요는 아래에 기술되어 있다. 한편 두 모형간의 구체적인 차이점에 대해서는 뒤의 충격반응함수 결과의 비교를 통해 살펴보도록 하겠다.

레짐변화와 외부관측인자를 고려한 DNS 모형 요약

측정식 :
$$\begin{bmatrix} m_{1t} \\ m_{2t} \\ y_t(\tau_1) \\ \vdots \\ y_t(\tau_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0_{2\times 3} \\ 0_{1\times 2} & \Lambda(\tau_1) \\ \vdots & \vdots \\ 0_{1\times 2} & \Lambda(\tau_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1t} \\ m_{2t} \\ \beta_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2\times 1} \\ e_t(\tau_1) \\ \vdots \\ e_t(\tau_N) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0_{2\times 3} \\ 0_{N\times 2} & \Lambda \end{bmatrix} \times f_t + \begin{bmatrix} 0_{2\times 1} \\ e_t(\tau_1) \\ \vdots \\ e_t(\tau_N) \end{bmatrix}$$

$$\text{전환방정식 : } \begin{bmatrix} m_{1t} \\ m_{2t} \\ Level_t \\ Slope_t \\ Curve_t \end{bmatrix} = \mu_{S_t} + G_{S_t} \times \begin{bmatrix} m_{1t-1} \\ m_{2t-1} \\ Level_{t-1} \\ Slope_{t-1} \\ Curve_{t-1} \end{bmatrix} + \Omega_{S_t}$$

$$\Rightarrow f_t | f_{t-1}, \theta, S \sim N(\mu_{s_t} + G_{s_t} f_{t-1}, \Omega_{s_t})$$

단, $y_t(\tau)$는 t시점에 만기가 τ인 채권 수익률, m_t는 미국채 장·단기금리 벡터, $\beta_t = (Level_t,\ Slope_t,\ Curve_t)'$는 수준($Level_t$), 기울기($Slope_t$), 곡률요인($Curve_t$)이며 f_t는 $[m_t, \beta_t]$이다.

〈Table 1〉과 〈Table 2〉의 모형 추정결과를 살펴보면 G 행렬에서 식별제약[9]을 주었기 때문에 한국 금리기간구조 잠재요인이 미국 수익률에 영향을 미치는 부분은 모두 0인 것을 확인할 수 있다. 한편 미국채 수익률이 영향을 미치는 정도는 변동성이 큰 상태($S_t = 2$)일 때 더 큰 것을 확인할 수 있다. Ω_{S_t} 추정결과를 살펴보면 $S_t = 2$일 때 행렬값의 크기가 크게 나타나는 것을 확인할 수 있어 추정이 잘 이루어졌다고 평가할 수 있다. 한편 〈Table 2〉의 추정결과를 살펴보면 경제상태 레짐에 따라 추정값이 크게 차이가 나는 것을 볼 수 있다. 이는 레짐변화를 고려하지 않을 경우 모형 추정에 왜곡이 있을 수 있다는 것을 시사한다. 이를 통계적으로 검증하기 위해 BIC를 기준으로 레짐 변화 모형과 레짐 변화를 고려하지 않은 모형 간 모형비교를 진행하였다. 그 결과 레짐 변화 모형의 BIC는 -970.7, 레짐 변화가 없는 모형의 BIC는 -1263.9로 추정되어 레짐 변화 모형이 강하게 선호된다는 것을 확인하였다.

〈Figure 3〉은 모형으로부터 추출된 금리기간구조 잠재요인과 실제 우리나라 수익률로부터 도출된 결정요인을 그린 것이다. 실제 자료로부터 결정요인의 실제값을 계산하기 위해 Diebold and Li(2006)의 방법을 준용하였다. 이에 따라 수준 요인은 10년 만기 수익률을, 기울기 요인은 10년 만기 수익률에서 3개월 만기 수익률을 차감한 값을, 곡도 변수는 2년 만기 수익률에 2를 곱한 값에서 3개월 만기 및 10년 만기 수익률을 차감한 값으로 정의하였다. 그림에서 보다시피 추정치와 실제값의 움직임이 매우 유사한 모습을 나타내고 있어 모형의 추정이 잘 이루어졌음을 확인할 수 있다.

---

9) 본고의 Ⅳ장 추정방법 중 1. 사전분포 및 식별제약을 참고하기 바란다.

〈Table 1〉 Estimates of parameters: Non-switching DNS model

(1) μ

0.00	0.12	0.05	0.04	-0.05
(0.06)	(0.06)	(0.05)	(0.06)	(0.09)

(2) G

0.98	0.00	0.00	0.00	0.00
(0.01)	(0.02)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
0.02	0.95	0.00	0.00	0.00
(0.02)	(0.02)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
-0.01	0.06	0.96	0.03	0.02
(0.02)	(0.03)	(0.02)	(0.02)	(0.02)
0.02	0.00	-0.03	0.93	0.04
(0.02)	(0.05)	(0.03)	(0.03)	(0.02)
0.09	-0.03	-0.06	-0.10	0.74
(0.05)	(0.06)	(0.05)	(0.06)	(0.04)

(3) Ω

0.05	0.01	0.00	0.00	0.02
(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.01)	(0.01)
0.01	0.08	0.02	-0.02	0.04
(0.00)	(0.01)	(0.01)	(0.01)	(0.02)
0.00	0.02	0.07	-0.06	0.00
(0.00)	(0.01)	(0.01)	(0.01)	(0.02)
0.00	-0.02	-0.06	0.11	-0.03
(0.01)	(0.01	(0.01)	(0.01)	(0.02)
0.02	0.04	0.00	-0.03	0.63
(0.01)	(0.02)	(0.02)	(0.02)	(0.08)

(4) σ_τ

τ=1	τ=2	τ=3	τ=4	τ=5	τ=6	τ=7
0.0063	0.0002	0.0030	0.0005	0.0332	0.0366	0.0002
(0.0007)	(0.0001)	(0.0003)	(0.0004)	(0.0033)	(0.0036)	(0.0001)

Note: The parentheses indicate the posterior standard deviation. This table is an estimate of the vector or matrix of the parameters in the model. When interpreting the estimation results, please refer to the factor vector, $f_t = [m_{1t}, m_{2t}, Level_t, Slope_t, Curve_t]'$ for the variable corresponding to each element.

〈Table 2〉 Estimates of parameters: Regime-Switching DNS model

(1) μ_{s_t}

-0.01	0.17	0.19	-0.15	0.03	-0.12	0.51	0.34	-0.05	-0.08
(0.03)	(0.07)	(0.06)	(0.07)	(0.10)	(0.22)	(0.20)	(0.28)	(0.32)	(0.47)
		〈$\mu_{s_t=1}$〉					〈$\mu_{s_t=2}$〉		

(2) G_{s_t}

0.99	0.01	0.00	0.00	0.00	0.89	0.04	0.00	0.00	0.00
(0.01)	(0.01)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.04)	(0.06)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
0.04	0.92	0.00	0.00	0.00	0.04	0.86	0.00	0.00	0.00
(0.02)	(0.03)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.04)	(0.06)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
-0.03	0.02	0.97	0.06	0.09	-0.03	0.26	0.79	0.02	-0.06
(0.02)	(0.04)	(0.02)	(0.03)	(0.02)	(0.05)	(0.10)	(0.06)	(0.05)	(0.03)
0.04	-0.03	0.01	0.85	-0.02	0.10	-0.11	-0.02	0.84	0.11
(0.02)	(0.04)	(0.02)	(0.03)	(0.02)	(0.07)	(0.13)	(0.09)	(0.07)	(0.04)
0.10	-0.06	-0.03	0.11	0.77	0.06	0.32	-0.31	-0.23	0.58
(0.04)	(0.07)	(0.04)	(0.07)	(0.04)	(0.17)	(0.32)	(0.23)	(0.18)	(0.12)
		〈$G_{s_t=1}$〉					〈$G_{s_t=2}$〉		

(3) Ω_{s_t}

0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.04	0.01	-0.03	0.07
(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.02)	(0.02)	(0.02)	(0.02)	(0.07)
0.00	0.05	0.02	-0.02	0.00	0.04	0.13	0.02	0.00	0.11
(0.00)	(0.01)	(0.00)	(0.00)	(0.01)	(0.02)	(0.03)	(0.02)	(0.02)	(0.08)
0.00	0.02	0.03	-0.02	-0.01	0.01	0.02	0.10	-0.09	-0.12
(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.01)	(0.02)	(0.02)	(0.02)	(0.03)	(0.07)
0.00	-0.02	-0.02	0.03	0.00	-0.03	0.00	-0.09	0.21	0.06
(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.01)	(0.02)	(0.02)	(0.03)	(0.05)	(0.10)
0.00	0.00	-0.01	0.00	0.07	0.07	0.11	-0.12	0.06	1.90
(0.00)	(0.01)	(0.01)	(0.01)	(0.02)	(0.07)	(0.08)	(0.07)	(0.10)	(0.45)
		〈$\Omega_{s_t=1}$〉					〈$\Omega_{s_t=2}$〉		

(4) σ_τ

$\tau=1$	$\tau=2$	$\tau=3$	$\tau=4$	$\tau=5$	$\tau=6$	$\tau=7$
0.0060	0.0002	0.0028	0.0008	0.0323	0.0359	0.0003
(0.0008)	(0.0001)	(0.0004)	(0.0008)	(0.0034)	(0.0037)	(0.0002)

Note: The parentheses indicate the posterior standard deviation. This table is an estimate of the vector or matrix of the parameters in the model. When interpreting the estimation results, please refer to the factor vector, $f_t = [m_{1t}, m_{2t}, Level_t, Slope_t, Curve_t]'$ for the variable corresponding to each element.

〈Table 3〉 ρ_{S_t} of Regime-Switching DNS model

1.00	0.16	0.03	-0.08	0.01	1.00	0.36	0.10	-0.20	0.17
(0.00)	(0.09)	(0.09)	(0.09)	(0.11)	(0.00)	(0.12)	(0.15)	(0.14)	(0.14)
0.16	1.00	0.54	-0.49	-0.03	0.36	1.00	0.15	0.00	0.21
(0.09)	(0.00)	(0.07)	(0.07)	(0.11)	(0.12)	(0.00)	(0.14)	(0.14)	(0.14)
0.03	**0.54**	1.00	-0.76	-0.17	0.10	**0.15**	1.00	-0.63	-0.27
(0.09)	**(0.07)**	(0.00)	(0.04)	(0.13)	(0.15)	**(0.14)**	(0.00)	(0.09)	(0.14)
-0.08	-0.49	-0.76	1.00	0.04	-0.20	0.00	-0.63	1.00	0.09
(0.09)	(0.07)	(0.04)	(0.00)	(0.13)	(0.14)	(0.14)	(0.09)	(0.00)	(0.15)
0.01	-0.03	-0.17	0.04	1.00	0.17	0.21	-0.27	0.09	1.00
(0.11)	(0.11)	(0.13)	(0.13)	(0.00)	(0.14)	(0.14)	(0.14)	(0.15)	(0.00)
		$<\rho_{s_t=1}>$					$<\rho_{s_t=2}>$		

Note: The parentheses indicate the posterior standard deviation.

〈Figure 4〉는 우리나라 3개월 및 10년 국채 수익률과 고변동성 상태확률을 함께 그린 것이다. 고변동성 상태확률은 베이지안 방식에 따라 10,000번의 시행 중에서 상태 2가 도출된 횟수를 구하여 고변동성 상태확률로 사용한다. 그 결과 글로벌 금융위기 이외에도 2001년, 2003년, 2005년 등에도 고변동성 국면이 나타난 것으로 분석되었다. 변동성이 확대되었던 시기를 분석해 보면 장·단기금리 모두 큰 폭의 변동이 있었으며 정책금리의 변경이 있었던 시기라는 공통점이 있다. 또한 변동성 확대 시기가 일반적인 통념과 완벽히 일치하지는 않았다. 예컨대, 2013년 중 있었던 테이퍼 탠트럼(Taper Tantrum) 시기는 고변동성 시기로 포착되지 않았다. 분석 시기를 바꿔서 금융위기 이후만 한정하여 분석하여도 같은 결과가 도출되었다. 이는 정책금리의 변경이 거의 이루어지지 않아 단기금리가 안정되어 있었던 것에 기인하는 것으로 추정된다. 분석결과 포착된 고변동성 국면시기의 금융시장 동향은 아래와 같다.

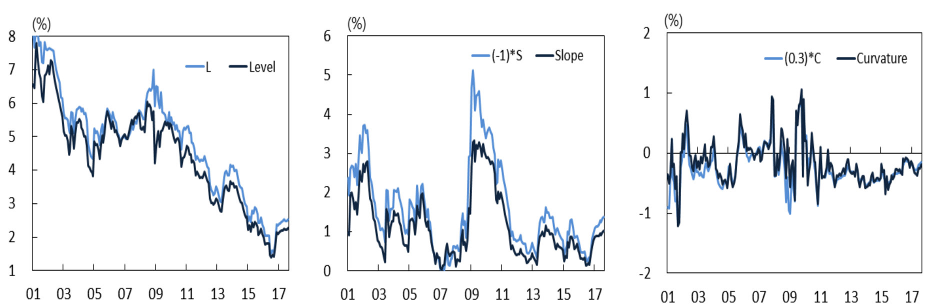
01.3월~5월(93.1%[10])에는 환율 급등에 따른 물가상승 우려, MMF의 대규모 환매 우려에 따른 채권수급시장 악화 우려 등으로 국고채 금리가 큰 폭 상승하다가 01.5월 들어 채권시장 안정화대책(01.4.27일), 경기회복 지연 가능성, 채권 수급 사정 호전기대 등으로 큰 폭 하락하였다. 01.9월~02.1월(80.8%)에는 01.9월중

10) 월별 고변동성 확률의 기간중 평균값을 사용하였다. 이하에서 나타나는 기간중 확률에 같은 기준을 적용하였다.

9.11 테러, 국내외 경기회복 지연전망 확산, 기준금리 인하(4.50% →4.00%), 미 연준의 정책금리 추가 인하 예상 등으로 시장금리가 큰 폭 하락하였다. 10월 들어서는 국내외 경기회복 기대감이 확대되며 02.1월까지 큰 폭 상승하였다. 03.7월(99.9%)에는 미국경제 호전 조짐과 기준금리 인하(4.00% →3.75%) 및 정부의 경기부양책 등으로 국내경기 저점통과 인식이 확산됨에 따라 장기금리는 큰 폭 상승하였다. 반면 단기시장금리는 기준금리 인하의 영향으로 큰 폭 하락하였다. 05.1월(99.8%)에는 월초 정부의 국고채 발행계획 규모 확대 발표(05.1.3일), 정책금리 인하기대 약화 및 경기회복 기대감 등으로 장·단기금리 모두 큰 폭 상승하였다. 09.11월~10.3월(75.1%)에는 국내외 경제지표 호조 및 미국채 금리 상승 등의 상승 요인과 두바이 사태, 중국의 금융긴축, 일부 유럽국가의 재정위기 등의 하락 요인이 엇갈리며 큰 폭의 등락이 나타났다.

한편 〈Figure 5〉에서는 한국과 미국의 정책금리 추이와 고변동성상태의 사후 확률을 함께 제시하였다. 그림을 보면 고변동성 국면은 한·미 정책금리 전환 국면에서 주로 나타나는 것을 확인할 수 있다. 또한 금융위기 이후 미국 정책금리가 0~0.25%에서 장기간 유지된 이후로는 상대적으로 안정된 국면이 지속되고 있는 것을 볼 수 있다. 다만 과거 사례를 통해 살펴볼 때, 향후 미국 정책금리의 인상이 지속적으로 이루어지고 우리나라의 정책금리도 변경된다면 다시 고변동성 상태가 나타날 가능성을 배제하기 힘들다.

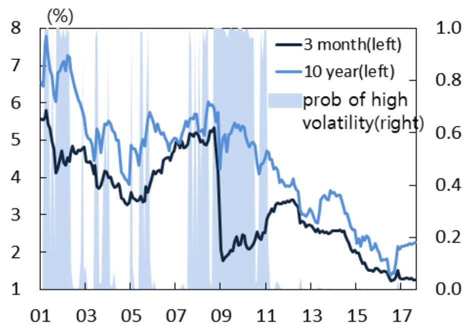
〈Figure 3〉 Estimates of 3 factors of Korean yield curves



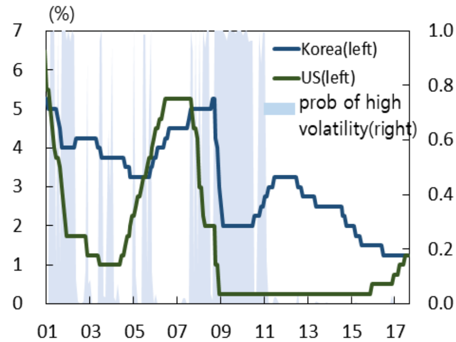
(a) Level (b) Slope (c) Curvature

Note: This figure is the estimation results for regime-switching DNS model. To facilitate comparison of the model estimates with the estimates derived from the actual data, the slope factor was multiplied by -1 and the model estimate S_t and the curvature was multiplied by 0.3 and the model estimate C_t.

〈Figure 4〉 3 month and 10 year Korea treasury bond yield and posterior prob of high volatility



〈Figure 5〉 Policy base rate in Korea and U.S. and posterior prob of high volatility



3. 충격반응함수 추정결과 및 해석

〈Figure 6〉은 레짐 변화를 고려하지 않은 경우(〈Table 1〉의 추정결과 참조)의 충격반응함수 결과이다. 이 경우에는 장·단기금리가 수준 요인에서 모두 유의하게 나타났으며 특히 단기금리의 파급 효과가 수준, 기울기, 곡률 요인에서 모두 유의미한 값을 가지는 것으로 나타났다. 그러나 이는 경제상태가 구분되지 않고 추정이 이루어짐에 따라 결과가 왜곡된 것으로 판단된다. 글로벌 금융위기 시기 미국은 5%대의 정책금리를 급격히 0~0.25%까지 인하하였으며 이와 같은 급격한 구조적 변화를 고려하지 않는다면 이는 통계 결과의 왜곡을 초래할 수 있다. 따라서 위에서 기술한 바와 같이 글로벌 경제의 변동성이 급격히 확대되었던 시기와 그렇지 않았던 시기를 구분하여 분석해야 더 정확한 충격반응함수를 도출할 수 있다.

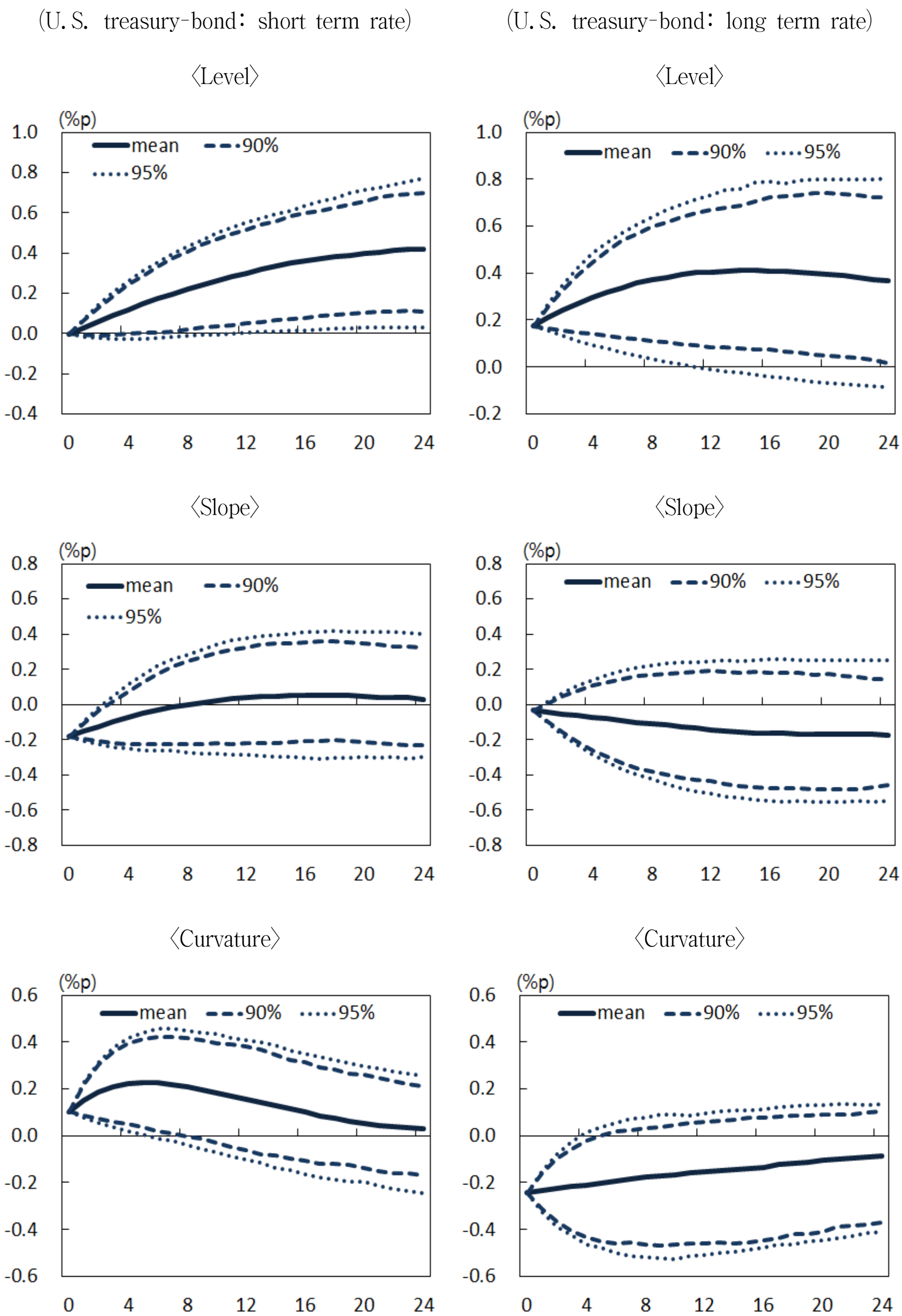
〈Figure 7〉과 〈Figure 8〉은 레짐 변화를 고려하여 추정한 경우의 충격반응함수 결과이다. 〈Figure 7〉에는 미국 단기금리 충격에 대해서 변동성 상태별로 우리나라 수익률곡선의 수준, 기울기 및 곡률 요인에 대한 충격반응함수 결과가 제시되어 있다. 동 분석에서는 미국 금리에서 1%p의 충격이 나타나는 것으로 가정하였다. 미국 단기금리 충격에 대해서는 그림에서 살펴볼 수 있듯이 변동성 상태와 관계없이 유의미한 충격이 나타나지 않았다. 다만 고변동성 상태의 경우에 충격에 대한 편차가 크게 확대되는 것을 확인할 수 있다. 〈Figure 8〉은 미국 장기금리 충격에 대한 충격반응함수 결과이다. 그림을 보면 확률분포가 유의미하다고 볼 수 있는 경우는

미국 장기금리 충격에 대한 수준변수의 반응이다. 변동성 상태의 경우와 무관하게 장기금리의 충격은 장기간 우리나라 금리의 수준 요인에 영향을 미치는 것으로 나타났다. 다만 저변동성 상태에서는 미국채 장기금리의 1%p 충격에 우리나라 금리의 수준 요인은 0.1%p 내외의 상승을 보인 반면, 고변동성 상태의 경우에는 수준요인이 0.3%p 내외로 상승하여 변동폭이 확대되는 것으로 나타났다. 또 하나 주목해야 할 것은 경제 상태가 변동성이 클 때는 추정의 신용구간(credibility intervals)도 급격히 확대된다는 점이다. 이는 변동성 확대 시기에는 점 추정치와 일치하지 않는 값이 얼마든지 현실화될 수 있다는 것을 의미한다. 따라서 향후 정책 판단에 있어서 경제 상태가 어떤 상태에 있는지에 따라 예측의 정확성도 달라질 수 있다는 점을 유념해야 한다. 또한, 저변동성 상태의 경우 미국채 장기금리의 충격이 기울기 요소에 음(-)의 영향을 3~4개월가량 주는 것으로 나타났다. 이는 미국채 장기금리의 충격이 우리나라의 미래 정책금리에 대한 기대에도 영향을 미쳐서 단기금리의 상승도 유발시키는 것으로 추정할 수 있다. 따라서 우리나라의 수익률이 안정적인 상황이라면 미국채 장기금리의 상승은 우리나라의 장기금리 상승에 영향을 미치면서 동시에 우리나라 정책금리에 대한 기대도 상승시킬 것으로 추정된다. 또한, 우리나라 수익률의 변동성이 급격히 확대된다면 미국채 장기금리의 상승은 우리나라의 장기금리를 큰 폭으로 변동시킬 것으로 예상된다.

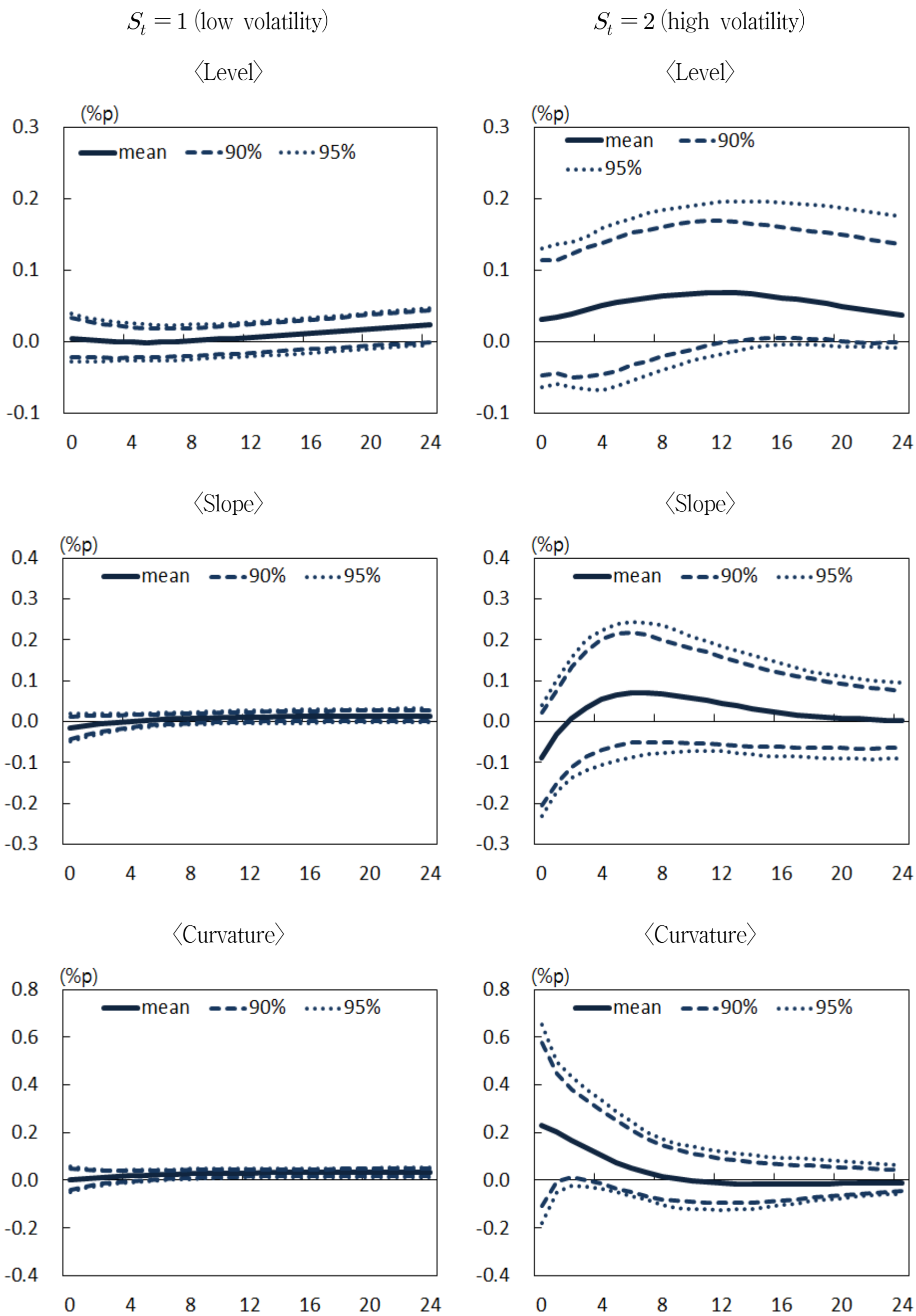
한편 요인별 충격반응 값을 이용하여 만기별 충격반응함수를 도출할 수 있으며 이에 대한 결과는 〈Figure 9〉와 〈Figure 10〉을 참고하기 바란다. 결과를 살펴보면 저변동성 상태에서는 미국 장기금리의 충격이 한국 장기금리에 단기적으로 영향을 미치는 반면, 고변동성 상태에서는 미국 장기금리 충격이 한국의 장·단기금리 모두에 영향을 미치는 것으로 나타났으며 미국 단기금리의 영향력도 일정 시차 이후 일부 나타나는 것으로 평가할 수 있다. 이처럼 변동성이 높을 상태일 때는 전염효과(contagion effect)에 의해 외부요인이 상대적으로 큰 영향을 미친다는 것이 알려져 있는데, 본고의 결과도 이를 잘 보여주고 있는 것으로 보인다.

파급경로와 관련하여 〈Table 2〉 G_{S_t}행렬과 〈Table 3〉 ρ_{S_t}행렬을 살펴보면 국면별로 상이한 결과가 도출된 것을 확인할 수 있다. G_{S_t}행렬에서 전기 미국 장기금리가 현재 우리나라 수준 요인에 미치는 영향을 보여주는 (3, 2) 값이 고변동성 상태일 때는 유의하게 나타난 반면 저변동성 상태일 때는 그렇지 못하였다. 반면 ρ_{S_t}행

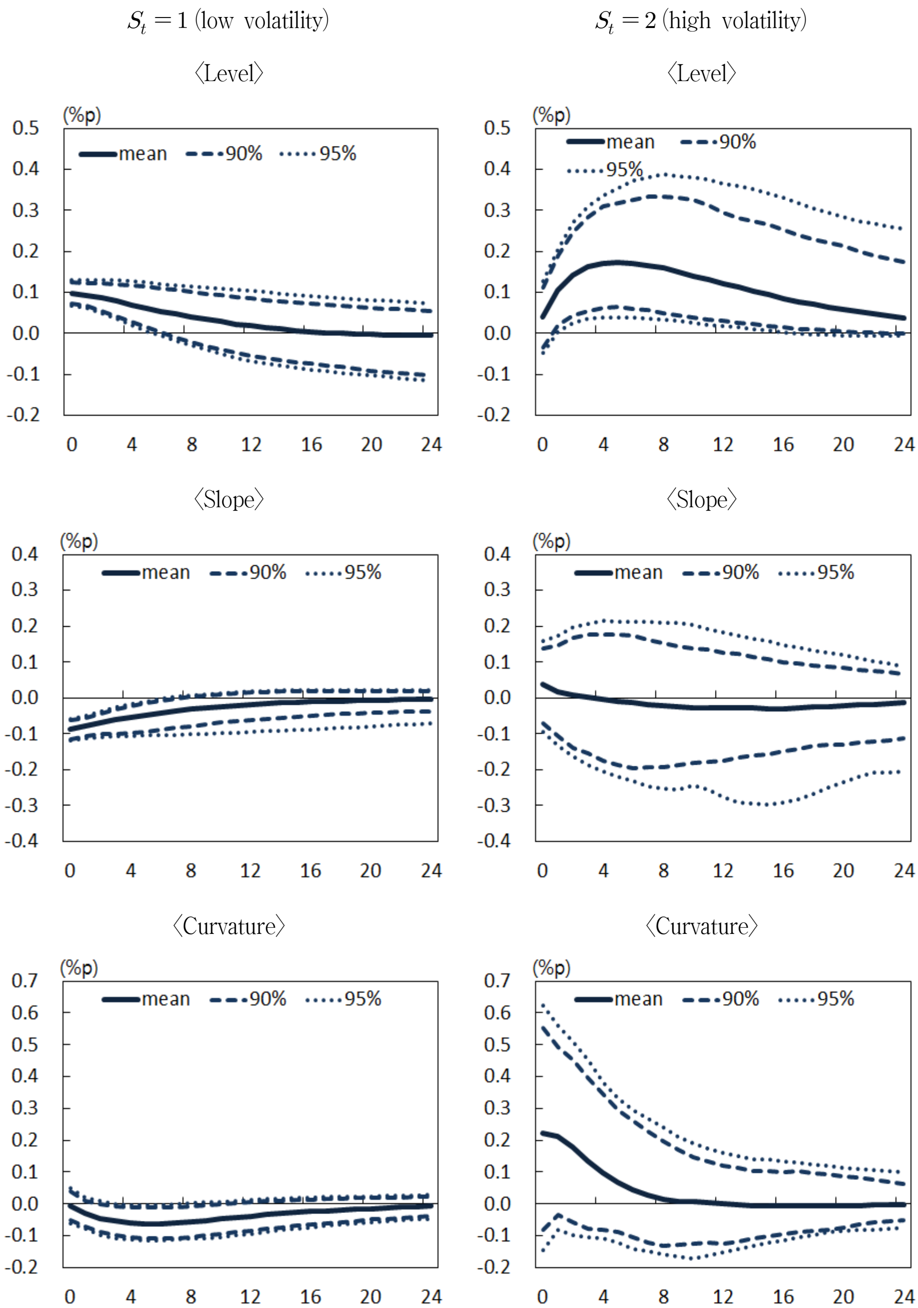
〈Figure 6〉 Impulse response function: Non-switching DNS model



〈Figure 7〉 Impulse response function on U.S. short-term interest rate shock: Regime-switching DNS model



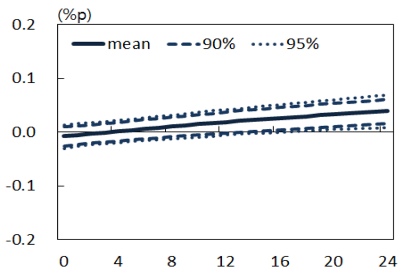
〈Figure 8〉 Impulse response function on U.S. long-term interest rate shock: Regime-switching DNS model



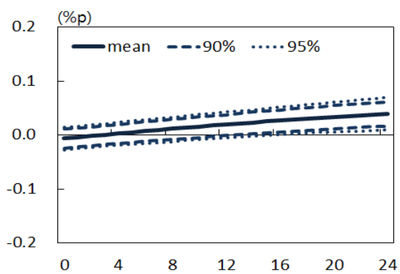
〈Figure 9〉 Impulse response function by maturity under $S_t = 1$ (low volatility)

(U.S. treasury-bond: short term rate)

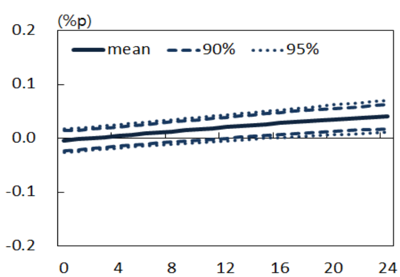
〈3 month〉



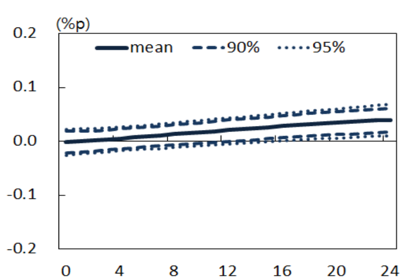
〈6 month〉



〈1 year〉

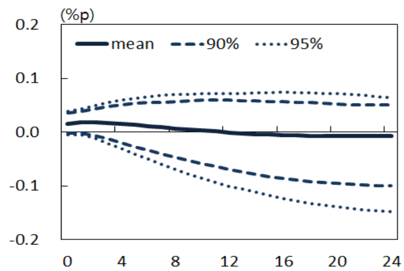


〈2 year〉

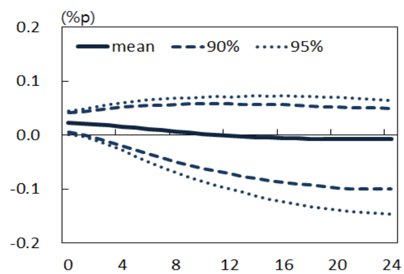


(U.S. treasury-bond: long term rate)

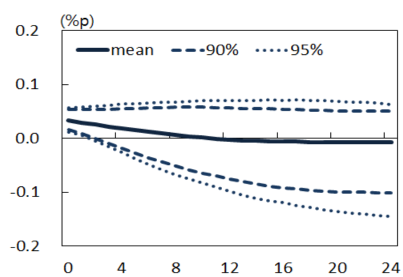
〈3 month〉



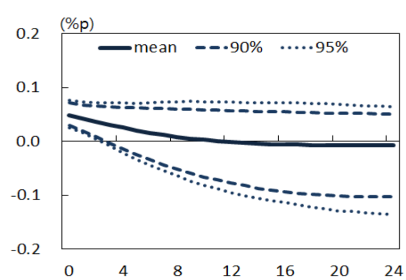
〈6 month〉



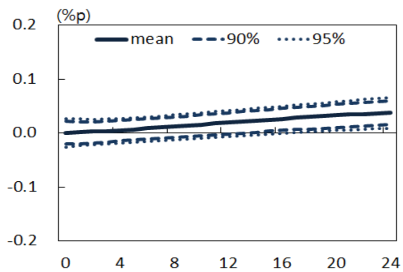
〈1 year〉



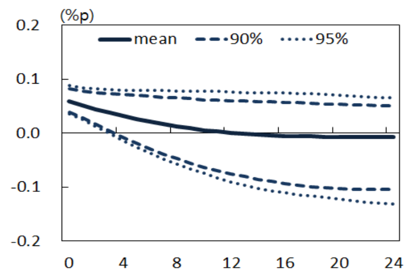
〈2 year〉



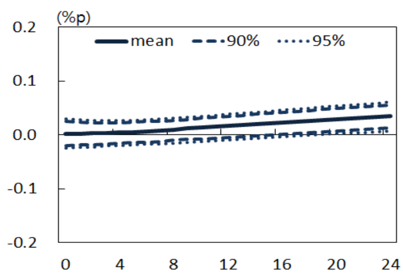
〈3 year〉



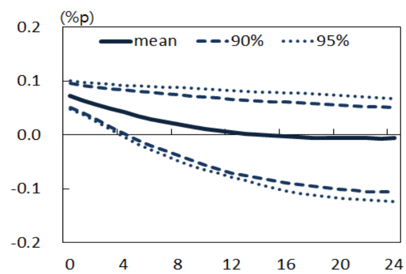
〈3 year〉



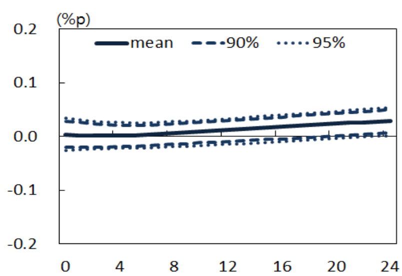
〈5 year〉



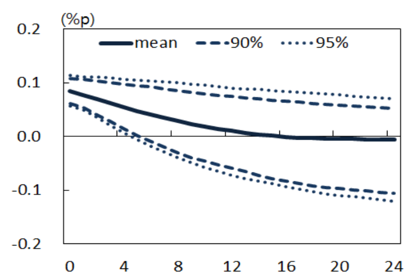
〈5 year〉



〈10 year〉



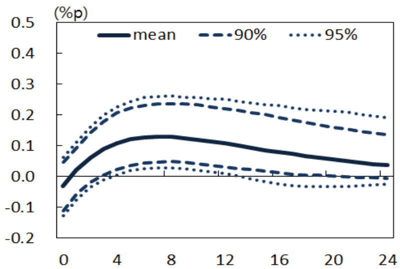
〈10 year〉



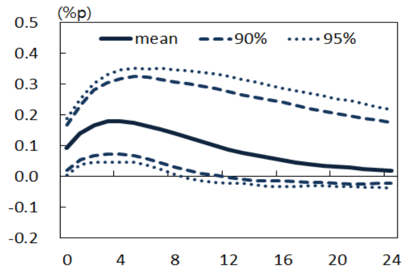
〈Figure 10〉 Impulse response function by maturity under $S_t = 2$(high volatility)

(U.S. treasury-bond: short term rate) (U.S. treasury-bond: long term rate)

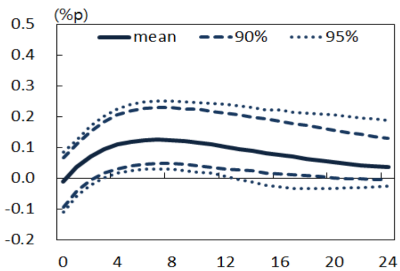
〈3 month〉



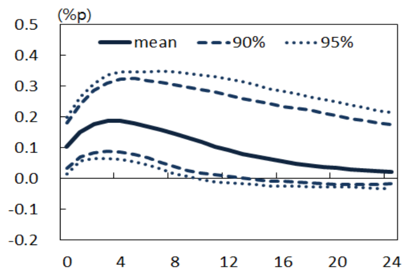
〈3 month〉



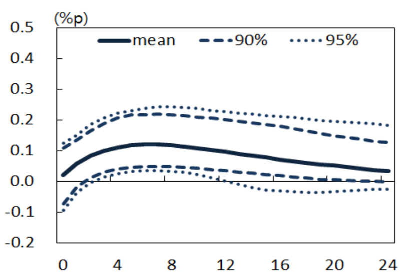
〈6 month〉



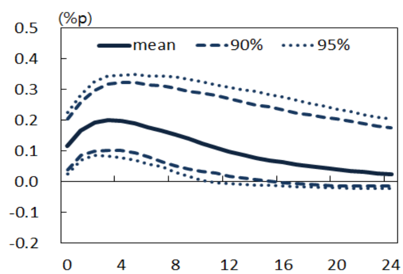
〈6 month〉



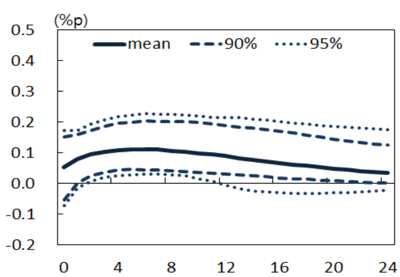
〈1 year〉



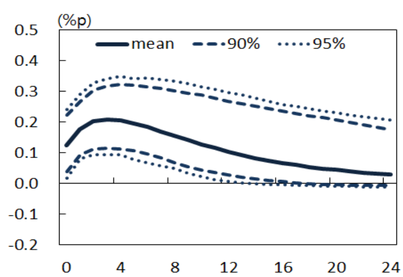
〈1 year〉

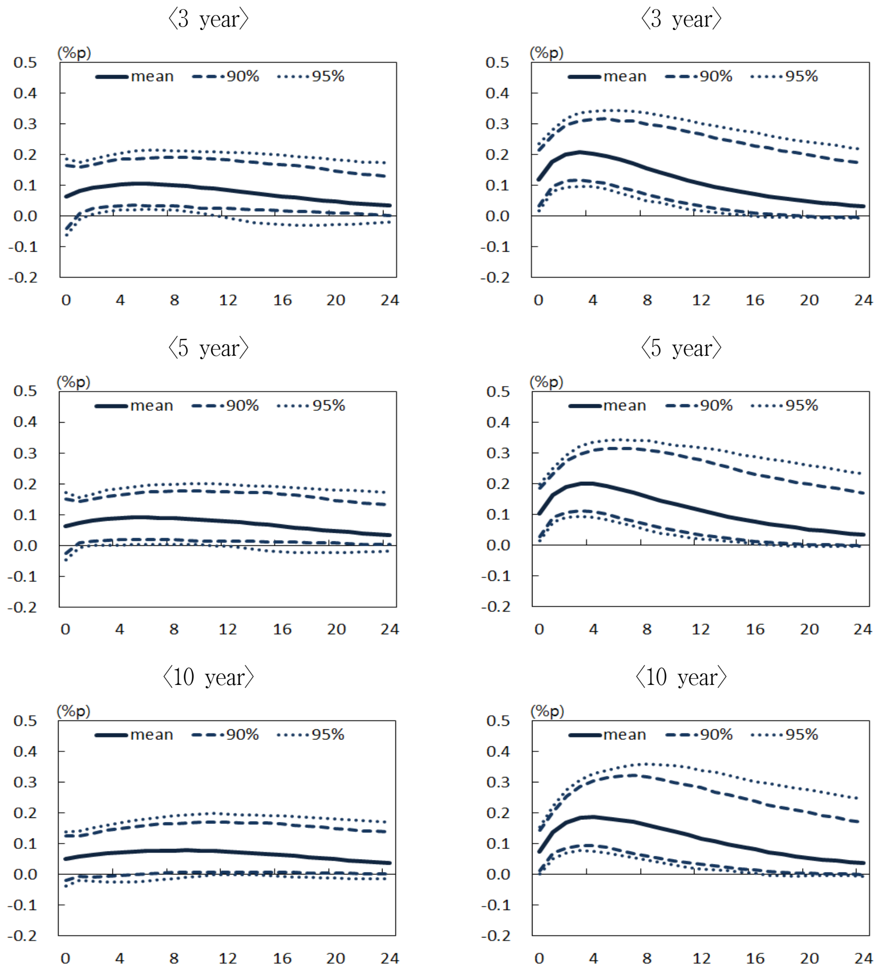


〈2 year〉



〈2 year〉





렬을 살펴보면[11] 저변동성 상태일 때 미국 장기금리와 우리나라 수준 요인간의 상관관계가 높게 추정되었다. 이는 고변동성 상태에 비해 저변동성 상태에서 미국 장기금리의 당기 효과가 크다는 것을 의미한다. 이를 정리하면, 고변동성 상태의 경우는 미국 장기금리의 충격이 1기의 시차를 갖고 국내 만기수익률에 영향을 주지만, 저변동성 상태에서는 당기적인 효과가 상대적으로 더 크다고 추론할 수 있다.

---

11) i차 충격반응함수는 $G_{S_t}^{i} B^{-1}$로 나타낼 수 있으며 $\Omega = B^{-1} B^{-1\prime}$이므로 ρ_{S_t} 요소는 충격반응함수에 지속적인 영향을 준다.

Ⅵ. 맺음말

본 연구는 우리나라 국채 수익률곡선이 대외요인, 즉 미국의 장·단기 국채금리에 의해 영향받는 정도를 동태적으로 분석하는 한편, 우리나라 국채 수익률곡선 동태성의 레짐변화 여부를 함께 분석하였다. 이를 위해 우선 Diebold et al. (2006)이 제안한 동태적 Nelson-Siegel 모형에 상태변수를 마코프 스위칭 과정으로 추가하였고, 미국채 금리가 외생적으로 우리나라 금리기간구조에 영향을 미칠 수 있도록 금리기간구조 모형을 설계하였다. 그리고 요인의 확률과정을 축약형 VAR 과정으로 가정하고 베이지안 MCMC를 적용하여 추정한 후에 축차적(recursive) VAR 모형의 모수로 식별하였다. 이를 통해서 수준, 기울기, 곡률 및 대외충격(미국채 단기 및 장기금리)에 대한 동태적 효과를 분석하였다. 분석결과 미국 단기 수익률보다는 장기 수익률이 우리나라 금리기간구조의 수준요인에 큰 영향을 미치고 있음을 확인할 수 있었다. 아울러 미국 장기금리 충격의 영향력은 우리나라 경제상태의 변동성이 커졌을 때 크게 확대되는 것으로 나타났다.

본 연구를 통한 중요한 시사점은 대외요인이 우리나라 금리기간에 미치는 영향의 비대칭성을 찾아내었다는 것이다. 마코프 레짐 스위칭 과정을 통해 우리나라 금리기간구조를 고변동성 상태와 저변동성 상태로 나눔으로써 이를 감안하지 않은 모형에서 발생할 수 있는 편의를 제거하였다. 또한 이 과정에서 우리나라 채권 수익률의 변동성이 확대되었던 시기를 찾아낼 수 있었다. 그 결과 글로벌 금융위기 시기 외에도 우리나라의 금리 변동성이 커진 시기를 찾아냈으며, 글로벌 금융위기 시에도 구체적으로 어떤 시기에 변동성이 확대됐는지 확인할 수 있었다. 또한 외부관측인자인 미국 국채 수익률을 우리나라의 금리기간구조 모형에 포함시켜 미국채 금리가 우리나라에 미치는 영향을 동태적으로 살펴보았으며, 미국채 금리 충격을 단기금리와 장기금리로 나누어 봄으로써 미국채 금리가 미치는 영향을 좀 더 심도 있게 분석하였다.

앞으로 미국의 금리인상 기조가 점진적이고 예측 가능한 범위 내에서 이루어진다면 우리나라 시장금리가 받게 될 영향은 제한적일 가능성이 클 것으로 보인다. 그러나 미국 금리인상과 함께 여러 대외 변수들이 예측 범위 내에서 움직인다면 국제금융시장의 변동성이 높아지면서 우리나라 시장금리의 변동성도 함께 확대될 가능성도 배제할 수 없다. 본고의 연구결과로부터 우리나라 금리기간구조가 변동성 확

대시기로 전환된다면 미국채 장기시장금리의 변동은 우리나라 금리 수준을 큰 폭으로 변동시킬 수 있으며 그 영향은 장기간 지속될 수 있다는 점을 확인하였다. 이는 통화정책의 금리경로를 통한 파급효과에 있어 대외요인, 즉 미국채 금리 충격이 당행의 완화적 통화정책 기조 유지에 있어 제약 요소로 작용할 수 있다는 것을 의미한다. 따라서 한국은행의 통화정책 수행에 있어 이와 같은 비대칭성을 고려하여 금융시장의 변동성 확대 시점을 조기에 포착하고 시장 안정화 조치를 비롯한 시의성 있는 정책 대응수단을 마련할 필요가 있다.

한편 본 연구에서는 충격이 발생했을 당시의 변동성 상태가 계속 지속된다고 가정하였다. 그러나 같은 상태가 지속될 확률이 높은 것은 사실이지만 충격이 발생한 이후 상태가 변할 확률도 존재한다. 따라서 마코프-스위칭 과정에서의 전환확률을 통해 상태가 변할 가능성도 염두에 둘 필요가 있다. 이에 대해서는 추후 연구 과제로 남긴다. 아울러 본 모형을 발전시켜 미국의 금리인상에 따라 한국을 포함한 신흥국의 반응을 분석하여 어떠한 공통점과 차이점이 있는지를 살펴보는 것도 의미있는 작업이 될 것이라고 생각한다.

■ 참 고 문 헌

1. 강규호, "우리나라 국채수익률 기간구조의 구조변화 시점추정과 원인분석," 『경제분석』, 제18권 제2호, 2012, pp. 29-52.

   (Translated in English) Kyu Ho Kang, "Structural Break in the Term Structure of the Korean Government Bond Yields," *Economic Analysis*, Vol. 18, No. 2, 2012, pp. 29-52.

2. _____, 『베이지안 계량경제학』, 박영사, 2016.

   (Translated in English) Kyu Ho Kang, *Bayesian Econometrics*, Seoul: Bakyoungsa, 2016.

3. 강규호 · 오형석, "미국 장기시장금리 변동이 우리나라 금리기간구조에 미치는 영향 분석 및 정책적 시사점," 『BOK 경제연구』, 제2015-2호, 2015, pp. 1-32.

   (Translated in English) Kyu Ho Kang and Hyoung Seok Oh, "Measuring the Dynamic Effect of the U.S. Interest Rate Changes on the Korean Yield Curve," *BOK Economic Research*, Vol. 2015, No. 2. Bank of Korea, 2015, pp. 1-32.

4. 강태수 · 이병주, "글로벌 금융위기를 전후한 한 · 미 금리기간구조 연계성의 변화 분석," 『조사

통계월보』, 2014년 12월호, 2014, pp. 40-67.

(Translated in English) Tae-Su Kang and Byongju Lee, "Analysis of Changes in Interconnectedness between Korean and US Term Structures Before and After the Global Financial Crisis," *Articles in Monthly Bulletin*, Bank of Korea, Dec. 2014, pp. 40-67.

5. 김도완, "2국가 Nelson-Siegel 모형을 이용한 해외요인이 한국 채권시장에 미치는 영향분석 및 예측," 『경제분석』, 제17권 제3호, 2011, pp. 89-130.

   (Translated in English) Do-wan Kim, "Analysis on the Effect of Foreign Factors on the Korean Bond Market and Prediction Using Two-country Nelson-Siegel Model," *Economic Analysis*, Vol. 17, No. 3, 2011, pp. 89-130.

6. 김도완 · 오형석, "글로벌 금융위기 이후 우리나라 수익률고선의 구조변화 분석 및 통화정책적 시사점," 『한국은행 행내현상논문』, 2014.

   (Translated in English) Do-wan Kim and Hyoung Seok Oh, "An Analysis of the Structural break on Korean Yield Curve after the Global Financial Crisis," *BOK Working Paper*, Bank of Korea, 2014.

7. ____________, "글로벌 금융위기 이후 국내외 시장금리 동조화 현상 분석: 미국 및 우리나라 수익률곡선 관계를 중심으로," 『경제학연구』, 제63집 제2호, 2015, pp. 111-143.

   (Translated in English) Do-wan Kim and Hyoung Seok Oh, "An Analysis of the Dynamic Effect of the U.S. Yield Curve on Korean Yield Curve after the Global Financial Crisis," *The Korean Journal of Economic Studies*, Vol. 63, No. 2, 2015, pp. 111-143.

8. 한국은행, "월중 금융시장 동향," 『한국은행 보도자료(매월』.

   (Translated in English) The Bank of Korea, "Financial Market Trends," *The Bank of Korea Press Releases (Monthly)*.

9. Ang, A., G. Bekaert, and M. Wei, "The Term Structure of Real Rates and Expected Inflation," *Journal of Finance*, Vol. 63, No 2, 2008, pp. 797-849.

10. Bank for International Settlements, "Recent Developments in the Global Economy," *Note for the Meeting of Governors*, 2013.

11. Bansal, R., and H. Zhou, "Term Structure of Interest Rates with Regime Shifts," *Journal of Finance*, Vol. 57, No. 5, 2002, pp. 1997-2043.

12. Carter, C., and R. Kohn, "On Gibbs Sampling for State Space Models," *Biometrika*, Vol. 81, No. 3, 1994, pp. 541-553.

13. Christensen, J. H. E., F. X. Diebold, and G. D. Rudebusch, "An Arbitrage-free Generalized Nelson-Siegel Term Structure Model," NBER Working Paper, No. 14463, 2008, pp. 1-32.

14. Dai, Q., K. J, Signleton, and W. Yang, "Regime Shifts in a Dynamic Term Structure Model of U.S. Treasury Bond Yields," *Review of Financial Studies*, Vol. 20, No. 5, 2007, pp. 1669-1706.

15. Diebold, F. X., and C. Li, "Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields," *Journal of Econometrics*, Vol. 130, 2006, pp. 337-364.

16. Diebold, F. X., G. D. Rudebusch, and B. Aruoba, "The Macroeconomy and the Yield Curve: a Dynamic Latent Factor Approach," *Journal of Econometrics*, Vol. 131, 2006, pp. 309-338.

17. Diebold, F. X., C. Li, and V. Z. Yue, "Global Yield Curve Dynamics and Interactions: A Dynamic Nelson-Siegel Approach," *Journal of Econometrics*, Vol. 146, 2008, pp. 351-363.

18. Ken, M., Mohanty M. S., and T. Chan, "Emerging Market Local Currency Bonds: Diversification and Stability," *Emerging Markets Review*, Vol. 22, pp. 126-139.

19. Kim, C. J., and C. R. Nelson, "State-Space Models with Regime-Switching: Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications," MIT Press, Cambridge, 1999.

20. Kim, C. J., C. R. Nelson, and J. Piger, "The Less Volatile U.S. Economy: A Bayesian Investigation of Timing, Breadth, and Potential Explanations," *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 22, No. 1, 2004, pp. 80-93.

21. Nelson, C. R., and A. F. Siegel, "Parsimonious Modeling of Yield Curves," *Journal of Business*, Vol. 60, No. 4, 1987, pp. 473-489.

22. Modugno, M., and K. Nikolaou, "The Forecasting Power of International Yield Curve Linkage," *ECB Working Paper Series*, No. 1044, 2009, pp. 4-30.

23. Peiris, S. J., "Foreign Participation in Emerging Markets' Local Currency Bond Markets," IMF Working Paper No. 88, 2010, pp. 4-30.

24. Turner, P., "Benign Neglect of the Long Term Interest Rate," BIS Working Papers, No. 403, 2013.

〈부록 1〉 동태적 Nelson-Siegel 모형

본 절에서는 먼저 Diebold et al. (2006)이 제안한 동태적 Nelson-Siegel 모형(이하 DNS 모형)을 소개하고자 한다. DNS 모형은 채권 수익률의 만기별 기간구조와 만기별 수익률 결정에 영향을 미치는 잠재요인의 관계를 모형화한 통계모형이다. 이 모형에서는 수익률 곡선의 형태가 세 개의 잠재요인들에 의해 결정된다고 가정하는데, 이들은 각각 수준(level), 기울기(slope), 곡도(curvature) 요인으로 해석된다. 이 잠재요인들은 관측이 되지 않지만 보통 수준요인은 장기채 수익률, 기울기 요인은 (단기채 수익률 - 장기채 수익률), 곡률요인은 (2×중기채 수익률 - 단기채 수익률 - 장기채 수익률)로 대략적으로 측정된다. 잠재요인들은 VAR(1) 과정을 따른다고 가정한다. 이로 인해 수익률 곡선은 동태성을 갖게 되며 상태-공간 모형(State-Space model)의 형태로 표현할 수 있게 된다.

이제는 DNS 모형을 상태-공간 모형의 형태로 표현하도록 하겠다. t시점에 만기가 τ인 채권 수익률을 $y_t(\tau)$라고 하자. 그리고 수준, 기울기, 곡률요인을 각각 $Level_t$, $Slope_t$, $Curve_t$ 라고 하자. 그러면 $\beta_t = (Level_t,\ Slope_t,\ Curve_t)'$는 다음과 같이 VAR(1) 과정을 따른다.

$$\beta_t|\beta_{t-1},\theta \sim N(\mu + G\beta_{t-1}, \Omega) \tag{A. 1}$$

이때 μ는 절편항, G는 VAR(1) 모형의 계수를 나타내는 행렬이며, Ω는 β_t의 조건부 분산-공분산 행렬이다. 그리고 θ를 모형 파라미터들의 집합으로 정의한다.

$y_t(\tau)$는 β_t에 의해 결정되며 여기에 각 만기별로 측정오차를 도입한다.

$$y_t(\tau)|\beta_t,\theta \sim N(\Lambda(\tau) \times \beta_t, \sigma_\tau^2) \tag{A. 2}$$

단, $\lambda = 0.0609$이고 $\Lambda(\tau) = (1,\ (\frac{1-e^{-\tau\lambda}}{\tau\lambda}),\ (\frac{1-e^{-\tau\lambda}}{\tau\lambda} - e^{-\tau\lambda}))$이며, $\Lambda(\tau)$를 요인계수(factor loading)로 칭한다. 요인계수를 살펴보면 $Level_t$, $Slope_t$, $Curve_t$가 각각 수준, 기울기, 곡률요인으로 해석되는 이유를 유추할 수 있다. $Level_t$의 계수는 1로 τ와 무관하게 모든 만기에 대해 동일하게 영향을 미치게 되므로 $Level_t$

는 수준요인으로 해석된다. 그리고 $Slope_t$의 요인계수는 $(\frac{1-e^{-\tau\lambda}}{\tau\lambda})$로서, τ가 0일 경우 1의 값을 가지며 τ가 커질수록 0으로 수렴한다. 따라서 $Slope_t$는 단기 수익률일수록 더 큰 가중치의 영향을 주기 때문에 수익률곡선의 기울기로 해석할 수 있다. 마지막으로 $Curve_t$의 요인계수는 $(\frac{1-e^{-\tau\lambda}}{\tau\lambda}-e^{-\tau\lambda})$인데 이 값은 중간 만기까지는 증가하다가 그 이후에는 다시 0으로 수렴한다. 이에 따라 $Curve_t$는 중간 만기에 가장 큰 가중치로 영향을 주며, 중간 만기 수익률의 변화는 수익률 곡선의 곡률에 영향을 주기 때문에 곡률요인으로 볼 수 있다. 한편 요인들의 계수를 결정하는 λ는 보통 수익률곡선의 곡도가 중기영역(23~30개월)에서 최대화되는 값을 부여하는 데, 본고에서는 Diebold and Li(2006)의 방식을 준용하여 30개월에서 곡도가 최대가 되도록 λ값을 0.0609로 설정하였다.

위에서 기술한 바와 같이 DNS 모형은 크게 식 (A.1)과 식 (A.2)로 구성되어 있으며, 이는 상태공간 모형(state-space model)로 표현 가능하다. 이 때 측정식은 식 (A.2), 전환식은 식 (A.1)이 된다.

〈부록 2〉 베이지안 MCMC 추정과정

(1단계) μ_{S_t}와 G_{S_t}샘플링

첫 번째 단계는 f, Ω_{S_t}, S가 주어져 있을 때 μ_{S_t}와 G_{S_t}를 샘플링한다. 전환식을 다시 써 보면 다음과 같다.

$$f_t|f_{t-1},\theta,S \sim N(\mu_{S_t}+G_{S_t}f_{t-1},\Omega_{S_t}) \tag{A.3}$$

그런데 식 (A.3)는 아래와 같이 SUR 모형[12]의 형태로 다시 표현할 수 있다.

12) 오차항들 사이에 공통요인이 존재하여 오차항들 간에 상관관계가 0이 아닌 두 개 이상의 회귀식을 SUR(Seemingly Unrelated Regression) 모형이라고 한다. 자세한 설명은 강규호(2016)을 참조하길 바란다.

$$f_t | X_t, \Omega_{S_t}, S \sim N(X_{t-1}\gamma, \Omega_{S_t}) \tag{A. 4}$$

단, γ와 X_t는 각각 아래와 같다.

$$\gamma = (\gamma'_{1,S_t=1}, \gamma'_{2,S_t=1}, \cdots, \gamma'_{5,S_t=1}, \gamma'_{1,S_t=2}, \gamma'_{2,S_t=2}, \cdots, \gamma'_{5,S_t=2})$$

단, $\gamma_{i,S_t=j} = (\mu_{i,S_t}, g_{i,1,S_t}, g_{i,2,S_t}, \cdots, g_{i,5,S_t})'$,

$$X_t = \begin{bmatrix} d_1 x_{t-1} & 0 & \cdots & 0 & d_2 x_{t-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_1 x_{t-1} & & \vdots & 0 & d_2 x_{t-1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_1 x_{t-1} & 0 & \cdots & 0 & d_2 x_{t-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} I_5 & \otimes x_t \end{bmatrix}$$

단, $x_t = \begin{bmatrix} 1 \ m_{1t} \ m_{2t} \ Level_t \ \ Slope_t \ \ Curve_t \end{bmatrix} = [1 \ \ m_t{}' \ \ \beta_t{}'] = [1 \ f_t{}']$.

이제 SUR로 표현된 식 (A. 4)에서 Ω_{S_t}, S가 주어져 있을 때, γ를 샘플링하면 μ_{S_t}와 G_{S_t}를 샘플링하는 것과 같다. γ의 완전 조건부분포는 아래와 같이 Normal-Normal 업데이트를 통해 도출할 수 있다.

$$\gamma | f, S, \Omega_{S_t} \sim N(\hat{\gamma}, \hat{V})$$

단,

$$\hat{V} = \left(\sum_{t=2}^{T}\left[\sum_{j=1}^{2}(X'_{t-1}\Omega_j^{-1}X_{t-1} \times I(s_t = j))\right] + \overline{V}_{\gamma}^{-1}\right)^{-1},$$
$$\hat{\gamma} = \hat{V}\left(\sum_{j=1}^{2}\sum_{t=2}^{T}(X'_{t-1}\Omega_j^{-1}f_t \times I(s_t = j)) + \overline{V}_{\gamma}^{-1}\overline{\gamma}\right)$$

이며, $\overline{\gamma}$와 $\overline{V_\gamma}$는 γ의 사전평균과 분산이다.

(2단계) Ω_{S_t} 샘플링

γ가 샘플링되고 난 후 γ, f, S가 주어져있을 때, 완전 조건부분포는

$$\Omega_{S_t=j} | f, \mu_{s_t}, G_{s_t}, S \sim Inverse\,Wishart(k_{1,j}, R_{1,j}),\ j=1,2$$

이다. 이로부터 $\Omega_{S_t=1}$와 $\Omega_{S_t=2}$를 샘플링한다.
단,

$$k_{1,j} = k_0 - 1 + \sum_{t=2}^{T} I(s_t = j),$$
$$R_{1,j} = R_0 + \sum_{t=2}^{T} [I(s_t = j) \times (f_t - X_{t-1} \times \gamma)(f_t - X_{t-1} \times \gamma)'],\ j = 1, 2$$

이다.

(3단계) Σ 추출

측정식의 가정에서처럼 측정오차 사이의 상관관계는 없다고 가정하기 때문에 만기별로 InverseGamma-InverseGamma 업데이트하여 $\left\{\sigma^2_{\tau_i}\right\}_{i=1}^{N}$을 샘플링한다.
$i=1, 2, \cdots, N$에 대해 개별 $\sigma^2_{\tau_i}$의 완전 조건부분포는 다음과 같다.

$$5000 \times \sigma^2_{\tau_i} | Y, f \sim Inverse\,Gamma(v_1/2, \delta_{1,i}/2)$$

단, $v_1 = v_0 + T$이고 $e_t(\tau_i) = y_t - \Lambda(\tau_i) \times f_t$는 만기별 잔차항이며, $\delta_{1,i} = \delta_0 + \sum_{i=1}^{T} e_t(\tau_i)^2$는 잔차항의 제곱의 합과 δ_0의 합이다.

(4단계) f_t 추출

$f=\{f_t\}_{t=1}^{T}$, $Y=\{y_t\}_{t=1}^{T}$의 완전 조건부분포는 결합 확률의 특성에 의해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} P(f|Y,S,\theta) &= P(f_T|Y,S,\theta)\times P(f_{T-1}|f_T,Y,S,\theta) \\ &\quad \times P(f_{T-2}|f_{T-1},f_T,Y,S,\theta)\times \cdots \times P(f_1|f_2,\cdots,f_T,Y,S,\theta) \\ &= P(f_T|Y,S,\theta)\times \prod_{t=1}^{T-1} P(f_t|f_{t+1},\cdots,f_T,Y,S,\theta) \end{aligned}$$

그런데 f_{t+1}가 주어지면 $\{f_j\}_{j=t+2}^{T}$, $\{y_j\}_{j=t+2}^{T}$에는 f_t에 대한 추가적인 정보가 없다. 따라서 완전 조건부분포를 다시 쓰면

$$p(f|Y,S,\theta)=p(f_T|Y,S,\theta)\times \prod_{t=1}^{T-1} p(f_t|f_{t+1},Y_t,S,\theta)$$

이다. 이제 f_t, f_{t+1}, Y 모두 정규분포를 따르기 때문에, 다변량 정규분포의 성질에 의해 $f_T|Y,S,\theta$, $f_t|f_{t+1},Y_t,S,\theta$ 모두 정규분포이다. 따라서 조건부 기댓값 $E(f_T|Y,S,\theta)$, $E(f_t|f_{t+1},Y_t,S,\theta)$과 조건부 분산 $Var(f_T|Y,S,\theta)$, $Var(f_t|f_{t+1},\sum_{i=1}^{T}e_t(\tau_i)^2$을 구하면 f_t를 도출할 수 있다.

위 조건부 기댓값과 분산은 Carter and Kohn 기법(Carter and Kohn, 1994)을 이용해 도출할 수 있는데 이 기법은 두 단계로 구성된다. 첫 번째 단계는 칼만 필터(Kalman filter)를 통해서 $E(f_t|Y_t,\theta)$과 $Var(f_t|Y_t,\theta)$를 도출한다. 두 번째 단계는 칼만 필터의 결과를 이용하여 $E(f_T|Y,\theta)$, $E(f_t|f_{t+1},Y_t,\theta)$, $Var(f_T|Y,\theta)$, $Var(f_t|f_{t+1},Y_t,\theta)$를 계산한 후, $t=T,T-1,\cdots,1$에 대해 역순으로 f_t를 샘플링한다. 각 단계의 구체적인 추출 방법은 아래와 같다.

(칼만필터(Kamlan filter))

칼만필터는 다음과 같이 6개의 식으로 구성된다.

$$E(f_t | Y_{t-1}, S, \theta) = f_{t|t-1} = \mu_{S_t} + G_{S_t} f_{t-1|t-1}$$
$$Var(f_t | Y_{t-1}, S, \theta) = V_{t|t-1} = G_{S_t} P_{t-1|t-1} G'_{S_t} + \Omega_{s_t}$$
$$E(y_t | Y_{t-1}, S, \theta) = y_{t|t-1} = \Lambda f_{t|t-1}$$
$$Var(y_t | Y_{t-1}, S, \theta) = k_{t|t-1} = \Lambda V_{t|t-1} \Lambda' + \Sigma$$
$$E(f_t | Y_t, S, \theta) = f_{t|t} = f_{t|t-1} + V_{t|t-1} \Lambda' k^{-1_{t|t-1}} (y_t - y_{t|t-1})$$
$$Var(f_t | Y_t, S, \theta) = V_{t|t} = V_{t|t-1} - V_{t|t-1} \Lambda' k^{-1_{t|t-1}} \Lambda V_{t|t-1}$$

$t=1$일 때 $f_{1|0}$과 $P_{1|0}$을 계산하기 위해서는 $f_{0|0}$과 $P_{0|0}$이 필요하며, 아래의 값을 초기값으로 사용한다.

$$f_{0|0} = \mu_{s_t} \times (I - G_{s_t})^{-1}$$
$$V_{0|0} = reshape(I_{k^2} - G_{s_t} \otimes G_{s_t})^{-1} \times vec(\Omega_{s_t}), k, k), \ k=5$$

단, $G_{s_t} \otimes G_{s_t}$는 $5^2 \times 5^2$ 행렬이고 $vec(\Omega)$은 $5^2 \times 1$ 벡터이다.

(Backward Recursion)

T 시점의 f_T는 칼만 필터로 얻은 $(f_{T|T}, P_{T|T})$를 이용하여 평균이 $f_{T|T}$, 분산이 $P_{T|T}$인 정규분포로부터 샘플링한다. 이제 $t = T-1, \ T-2, \cdots, 1$에 대해서 f_t를 샘플링하기 위해서 $E(f_t | f_{t+1}, Y_t, \theta)$와 $Var(f_t | f_{t+1}, Y_t, \theta)$을 계산해야 한다. 칼만 필터의 결과로부터 $f_t | Y_t, \theta$의 평균과 분산, $f_{t+1} | Y_t, \theta$의 평균과 분산을 계산하였다. 따라서 f_t와 f_{t+1}의 결합 조건부 확률분포는 아래와 같다.

$$\left(\frac{f_t}{f_{t+1}}\right)| Y_t, S, \theta \sim N\left(\begin{pmatrix} f_{t|t} \\ f_{t+1|t}\end{pmatrix}, \begin{bmatrix} V_{t|t} & V_{t|t}G' s_{t+1} \\ G_{S_{t+1}}V_{t|t} & V_{t+1|t}\end{bmatrix}\right)$$

이제 다변량 정규분포의 성질로부터 $f_t | f_{t+1}, Y_t, \theta$의 조건부 기댓값과 분산은 각각

$$E(f_t|f_{t+1}, Y_t, S, \theta) = f_{t|t} + V_{t|t}G'_{s_{t+1}}(V_{t+1|t})^{-1}(f_t - f_{t+1|t}) \quad (A.5)$$

$$Var(f_t|f_{t+1}, Y_t, S, \theta) = V_{t|t} - V_{t|t}G'_{s_{t+1}}(V_{t+1|t})^{-1}G_{s_{t+1}}V_{t|t} \quad (A.6)$$

이다. 이제 $t = T-1,\ T-2, \cdots, 1$에 대해서 f_t를 평균이 식 (A.5)이고 분산이 식 (A.6)인 정규분포에서 추출할 수 있다.

(**5단계**) S_t 추출

$S=\{S_t\}_{t=1}^{T}$의 완전조건부 밀도는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}\pi(S|\tilde{f}_T, \theta) &= P(S_1, S_2, S_3, \cdots, S_T | \tilde{f}_T, \theta) \\ &= P(S_T|\tilde{f}_T, \theta) \times p(S_{T-1} | S_T, \tilde{f}_T, \theta) \times P(S_{T-2} | S_T, S_{T-1}, \tilde{f}_T, \theta) \times \cdots \\ &\cdots \times P(S_1 | S_2, S_3, \cdots, S_T, \tilde{f}_T, \theta)\end{aligned} \quad (A.7)$$

단, $\tilde{f}_t = \{f_i\}_{i=1}^{t}$이다.

그런데 S_t는 마코프 과정을 따르므로 바로 전기의 상태에만 영향을 받는다. 또한 S_t를 추정함에 있어 S_{t+1}이 알려져 있다면 $f_{t+1}, f_{t+2}, \cdots$ 는 추론에 있어 도움이 되지 않는다. 따라서 식 (A.7)은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$P(S|\tilde{f}_T, \theta) = P(S_T|\tilde{f}_T, \theta)\prod_{t=1}^{T-1} P(S_t | S_{t+1}, f_t, \theta) \quad (A.8)$$

S의 샘플링은 두 단계로 구성된다. 첫 번째 단계로 해밀턴 필터를 통해 필터드 확률(filtered probaility, $P(S_t | \tilde{f}_t, \theta)$)를 계산한다. 두 번째 단계로 S를 S_T부터 S_{T-1}, S_{T-2}, …, S_1의 순으로 샘플링한다. 구체적인 추출 방법은 아래와 같다.

(**해밀턴필터**(Hamilton filter))

먼저 $P(S_t = j|\tilde{f}_t, \theta)$는 베이즈 법칙에 의해 다음과 같이 표현 가능하다.

$$
\begin{aligned}
P(S_t = j|\tilde{f}_t, \theta) &= P(S_t = j| f_t, \tilde{f}_{t-1}, \theta) \\
&= \frac{P(S_t = j, f_t | \tilde{f}_{t-1}, \theta)}{f(f_t | \tilde{f}_{t-1}, \theta)} \\
&= \frac{f(f_t | S_t = j, \tilde{f}_{t-1}, \theta) P(S_t = j | \tilde{f}_{t-1}, \theta)}{f(f_t | \tilde{f}_{t-1}, \theta)} \\
&= \frac{f(f_t | S_t = j, \tilde{f}_{t-1}, \theta) P(S_t = j | \tilde{f}_{t-1}, \theta)}{f(f_t | \tilde{f}_{t-1}, \theta)} \qquad \text{(A. 9)}
\end{aligned}
$$

식 (A. 9)에서 $f(f_t | S_t = j, \tilde{f}_{t-1}, \theta)$는 β_t의 조건부 밀도이며 $N(\mu_{s_t = j} + G_{s_t = j} f_{t-1}, \Omega_{s_t = j})$를 따른다. 또한, 예상확률 $P(S_t = j|\tilde{f}_t, \theta)$는 아래와 같이 전개할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
P(S_t = j|\tilde{f}_{t-1}, \theta) &= \sum_{j=1}^{2} P(S_t = j| S_{t-1} = i, \tilde{f}_{t-1}, \theta) P(S_{t-1} = i | \tilde{f}_{t-1}, \theta) \\
&= \sum_{j=1}^{2} P(S_t = j| S_{t-1} = i) P(S_{t-1} = i | \tilde{f}_{t-1}, \theta) \\
&= \sum_{j=1}^{2} p_{ij} P(S_{t-1} = i | \tilde{f}_{t-1}, \theta)
\end{aligned}
$$

초기값 $P(S_0 | f_0)$가 주어져있을 때, 위 식에 따라 $P(S_1 | f_0, \theta)$를 계산하고, 해밀톤 필터에서 $P(S_1 | f_1, \theta)$를 계산한다. 이 과정을 반복하면 $P(S_t|\tilde{f}_t, \theta)$가 도출된

다. 한편 초기값 $P(S_0|f_0)$는 아래의 식을 사용한다.

$$P(S_0 = 1) = \frac{1-p_{22}}{2-p_{11}-p_{22}}$$
$$P(S_0 = 2) = \frac{1-p_{11}}{2-p_{11}-p_{22}}$$

(Backward Recursion)

먼저 S_T를 해밀턴 필터의 결과를 이용하여 $P(S_T|\widetilde{f}_T,\theta)$의 확률로 샘플링한다. 구체적인 샘플링 방법은 먼저 $Unif(0,1)$로부터 임의의 확률변수를 샘플링하여 $P(S_T=1|\widetilde{f}_T,\theta)$과 비교하여 S_T의 상태를 추출한다.

$$u \sim Unif(0,1),$$
$$S_T = \begin{cases} 1 & \text{if } u < P(S_T = 1|\widetilde{f}_T,\theta) \\ 2 & \text{if } u \geq P(S_T = 1|\widetilde{f}_T,\theta) \end{cases}$$

한편 $P(S_t = 1|S_{t+1}, \widetilde{f}_t, \theta)$는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$P(S_t = 1|S_{t+1} = j, \widetilde{f}_t, \theta) = \frac{P(S_t = 1, S_{t+1} = j|\widetilde{f}_t, \theta)}{P(S_{t+1} = j|\widetilde{f}_t, \theta)}$$
$$= \frac{P(S_t = 1,|\widetilde{f}_t, \theta)P(S_{t+1} = j|S_t = 1, \widetilde{f}_t, \theta)}{\sum_{i=1}^{2} P(S_{t+1} = i, S_{t+1} = j|\widetilde{f}_t, \theta)}$$
$$= \frac{P(S_t = 1,|\widetilde{f}_t, \theta)P(S_{t+1} = j|S_t = 1)}{\sum_{i=1}^{2} P(S_{t+1} = i|\widetilde{f}_t, \theta)P(S_{t+1} = j|S_t = i)}$$

그러면 S_T의 샘플링 결과를 이용해서 $P(S_{T-1}|S_T, \widetilde{f}_T, \theta)$의 확률로 S_{T-1}을 추출할 수 있다.

$$u \sim Unif(0,1),$$
$$S_{T-1} = \begin{cases} 1 & \text{if } u < P(S_{T-1} = 1 | S_t, \tilde{f}_T = j, \theta) \\ 2 & \text{if } u \geq P(S_{T-1} = 1 | S_t, \tilde{f}_T = j, \theta) \end{cases}$$

이제 이 과정을 $S_{T-2}, S_{T-3}, \cdots S_1$ 까지 반복하면 $\{S_t\}_{t=1}^{T}$가 샘플링된다.

(6단계) P 추출

이 단계에서는 p_{11}과 p_{22}를 샘플링한다. 그러면 p_{12}와 p_{21}은 각각 $1-p_{11}$과 $1-p_{22}$이므로 바로 결정된다. 전환확률 P의 사후분포 샘플링은 오직 S에만 의존한다.

$$\pi(P | Y, S, f, \theta) \propto \pi(S | P)\pi(P)$$

한편 P의 사전밀도는 p_{11}과 p_{22}의 사전밀도의 곱에 비례한다.

$$\pi(P) \propto \underbrace{p_{11}^{a_{1,0}-1}(1-p_{11})^{b_{1,0}-1}}_{p_{11}\text{의 사전밀도}} \times \underbrace{p_{22}^{b_{2,0}-1}(1-p_{22})^{a_{1,0}-1}}_{p_{22}\text{의 사전밀도}}$$

또한 $\pi(S | P)$는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\pi(S | P) = f(S_1, S_2, \cdots, S_T | P)$$
$$= f(S_T | S_{T-1}, P) f(S_{T-1} | S_{T-2}, P) \cdots f(S_2 | S_1, P)$$

상태가 i에서 j로 전환된 횟수를 n_{ij}라고 하자. 그러면 $\pi(S | P)$는

$$= p_{11}^{n_{1,1}-1}(1-p_{11})^{n_{1,2}-1} p_{22}^{n_{2,1}-1}(1-p_{22})^{n_{2,2}-1}$$

로 계산된다.

따라서 $\pi(S|P)\pi(P)$를 계산하면 p_{11}과 p_{22}의 사후밀도를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\pi(P_{11}|S) \propto p_{1,1}^{a_{1,0}+n_{1,1}-1}(1-p_{1,1})^{b_{1,0}+n_{1,2}-1}$$
$$\pi(P_{22}|S) \propto p_{2,2}^{a_{2,0}+n_{2,1}-1}(1-p_{2,2})^{b_{2,0}+n_{2,2}-1}$$

이에 따라 p_{11}과 p_{22}의 완전 조건부분포는 아래의 베타분포로부터 얻을 수 있다.

$$p_{11} \sim Beta(a_{1,0}+n_{11},\, b_{1,0}+n_{12})$$
$$p_{22} \sim Beta(a_{2,0}+n_{21},\, b_{2,0}+n_{22})$$

Asymmetric Dynamic Impact of U.S. Interest Rates on the Korean Yield Curve*

Hyun-Seok Jeong** · Kyu Ho Kang***

Abstract

The recent rises of U.S. interest rates may influence on the domestic yield curve, and its impact is possibly asymmetric depending on the state of the economy. This paper examines asymmetric dynamic impact of U.S. interest rates on the Korean yield curve. To this end, we propose and estimate a dynamic Nelson-Siegel model of interest rates with regime shifts and observed factors by extending the approach of Diebold, Rudebusch, Aruoba (2006). Our econometric approach is Bayesian. The estimation results based on the monthly data since 2001 can bs summarized as follows. First, the regimes of the Korean yield curve dynamics are identified as low and high volatility states. Second, the U.S. short-term interest has little impact on the shape of the Korea yield curve. Third, the Korean yield curve is substantially influenced by the U.S. long-term interest rate during the high volatility state. Specifically, 1%p U.S. long-term interest rate shock increases the Korean long-term interest rate by 0.3%p. We believe that our work contributes to the literature by providing a quantitative analysis on the U.S. tapering policy, and provides predictive yield curve information for monetary policy.

Key Words: Markov regime-switching model, Bayesian MCMC method, impulse responses
JEL Classification: G12, C11, E43

Received: May 17, 2017. Revised: Sept. 12, 2017. Accepted: Nov. 17, 2017.

* This work was supported by the Ministry of Education of the Republic of Korea and the National Research Foundation of Korea (NRF-2015S1A5A8011737).

** First Author, Junior Economist, Bank of Korea, 217, Paldal-ro, Jangan-gu, Suwon-si, Gyeonggi-do 16272, Korea, Phone: +82-31-250-0075, e-mail: hsj@bok.or.kr

*** Corresponding Author, Associate Professor, Department of Economics, Korea University, 145, Anam-ro, Seongbuk-gu, Seoul 02841, Korea, Phone: +82-2-3290-5132, e-mail: kyuho@korea.ac.kr